

Matemática Discreta. LADE+ITIG

Fecha: 8 de Febrero del 2005 Tiempo: 3 horas

*El examen está compuesto por 5 problemas cada uno de los cuales vale 2 puntos.
Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.
Podéis consultar una hoja resumen, pero no está permitido el uso de calculadoras.*

Ejercicio 1. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple de modo que $|V| = n \geq 3$. Para cada $v \in V$ denotamos por $gr(v)$ su grado.

a) Demostrar que el grado de cada vértice es menor o igual que $n - 1$.

Por definición el grado de un vértice es el número de vértices adyacentes con él. Como el grafo es simple entonces no tiene lazos de modo que el conjunto de vértices adyacentes con $v \in V$ es un subconjunto de $V - \{v\}$ y por tanto $gr(v) \leq n - 1$.

b) Demostrar que son equivalentes las dos siguientes afirmaciones

$$gr(v) = n - 1 \text{ para todo } v \in V$$

G es isomorfo al grafo completo K_n

Usando el apartado a) si $gr(v) = n - 1$ entonces el conjunto de vértices adyacentes con v es exactamente $V - \{v\}$. De esta manera si $gr(v) = n - 1$ para cada v entonces cada posible par de vértices es un elemento de E , lo que demuestra que es isomorfo a K_n . El recíproco es cierto puesto que el grado de cada vértice en el grafo completo es $n - 1$.

c) Demostrar que si $gr(v) \geq n - 2$ para cada $v \in V$ entonces G es conexo.

Tomamos dos vértices distintos $v, w \in V$. Si $\{v, w\} \in E$ los dos vértices están conectados por un camino. Si $\{v, w\} \notin E$ entonces como $gr(v) = gr(w) \geq n - 2$ se tiene que el conjunto de vértices adyacentes con v es $V - \{v, w\}$ y de igual manera el conjunto de vértices adyacentes con w . De este modo hay un vértice que es adyacente simultáneamente con v y w lo que los conecta mediante un camino de longitud 2.

d) Demostrar que la sentencia recíproca de la afirmación de c) no es verdadera. Tomamos por ejemplo el ciclo C_5 , que es conexo y cuyos vértices son todos de grado 2.

Ejercicio 2. a) Determinar si es posible encontrar un par de números enteros (a, b) , $a, b \in \mathbb{Z}$ de modo que $1 = 17a + 5b$. En caso de que sea posible determinar algún valor del par (a, b) .

Como el $mcd(17, 5) = 1$ dicha descomposición es posible por el Lema de Bezout. Basta calcular el máximo común divisor por el algoritmo de Euclides para concluir $a = -2$ y $b = 5$.

b) Demostrar que para cada $k \in \mathbb{N}$ los números enteros $3k + 2$ y $5k + 3$ son primos entre sí.

Como $5k + 3 \geq 3k + 2$ podemos calcular el máximo común divisor por el algoritmo de Euclides y obtener que en efecto $mcd(5k + 3, 3k + 2) = 1$. En efecto, la descomposición es:

$$5k + 3 = (3k + 2) \times 1 + (2k + 1)$$

$$3k + 2 = (2k + 1) \times 1 + (k + 1)$$

$$2k + 1 = (k + 1) \times 1 + k$$

$$k + 1 = k \times 1 + 1.$$

Ejercicio 3. a) ¿De cuántas maneras se pueden repartir 10 procesos indistinguibles entre cinco procesadores diferentes de modo que siempre queden dos o más procesadores libres? (Cada procesador puede efectuar más de un proceso a la vez.) Pueden ocurrir tres situaciones: (i) dos libres y tres ocupados, (ii) tres libres y dos ocupados, (iii) cuatro libres y uno ocupado.

En (i) hay $\binom{5}{2}$ maneras de elegir los dos procesadores que quedan libres. Ahora como los otros tres ordenadores están ocupados, cada uno realiza al menos un proceso. De esta manera quedan 7 procesos que repartir. Son entonces en total:

$$P_1 = \binom{5}{2} \times CR_{7,3}.$$

En (ii) razonando igual tenemos:

$$P_2 = \binom{5}{3} \times CR_{8,2}.$$

Y de igual manera en (iii) tenemos:

$$P_3 = 5.$$

El resultado final es $P_1 + P_2 + P_3$.

b) Cada procesador tiene una probabilidad de error de 10^{-7} al efectuar un proceso. Supongamos que los 5 procesadores están efectuando cada uno un proceso independientemente. ¿Cuál es la probabilidad de que los cinco resultados sean incorrectos? ¿Cuál es la probabilidad de que haya una cantidad de errores mayor o igual que 3?

Se trata de un experimento de Bernoulli que se repite 5 veces. La probabilidad de que los cinco sean incorrectos es $(10^{-7})^5$. La probabilidad de que haya tres o más errores es:

$$\binom{5}{3}(10^{-7})^3(1 - 10^{-7})^2 + \binom{5}{4}(10^{-7})^4(1 - 10^{-7})^1 + (10^{-7})^5.$$

Ejercicio 4. Sea M (una matriz $n \times n$) la matriz de adyacencias de una relación. Asumimos, como en Maple, que basta escribir $M[i, j]$ para acceder a la entrada de M que ocupa la fila i -ésima y la columna j -ésima. Construir un algoritmo que determine si la relación asociada es o no antisimétrica. Estudiar la complejidad de dicho algoritmo, donde n es el tamaño de la entrada.

Entrada: M

$S := 0$

For $i = 1$ to n while $S = 0$

For $j = i + 1$ to n while $S = 0$

if $M[i, j] = 1$ and $M[j, i] = 1$ then $S := 1$

If $S = 0$ then $R :=$ antisimétrica else $R :=$ no antisimétrica

Salida: R

Es un algoritmo de complejidad $O(n^2)$ pues hay dos bucles anidados.

Ejercicio 5. Sean p, q, r, s y t variables proposicionales. Sea P la siguiente forma proposicional: $P := ((p \wedge q) \vee \neg s) \Rightarrow (s \wedge \neg t) \wedge \neg p$. Construimos un grafo simple

$G = (V, E)$ de la siguiente manera: el conjunto de vértices es $V = \{p, q, r, s, t\}$. Un subconjunto $\{a, b\} \in E$ si y solamente si tomando $a : V$ y $b : V$ existen valores de verdad para el resto de las variables proposicionales de modo que $P : V$.

a) Representa el grafo G de dos maneras distintas.

Como $p : V$ implica $\neg p : F$ y al fin $P : F$ entonces p no es adyacente con ningún otro vértice. De esta manera para que $P : V$ debe ser $p : F$. Si $p : F$ entonces $(p \wedge q) : F$. Así con $s : V$ se tiene que $((p \wedge q) \vee \neg s) : F$ y por tanto la implicación verdadera, esto es, $P : V$. Entonces la elección $p : F$ y $s : V$ hace que $P : V$ lo que concluye que cualquier par de vértices a, b tal que $p \neq a \neq b \neq p$ son adyacentes.

De esta manera el grafo puede interpretarse como la unión disjunta de K_1 y K_4 . Su matriz puede ser, con la ordenación alfabética de los vértices:

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Determinar si G es Euleriano. Determinar si es Hamiltoniano.

No es Euleriano pues hay vértices de grado impar. No es Hamiltoniano pues no es conexo.

c) Determinar cuántos caminos de longitud 2 unen s y t .

Basta calcular $M^2[2, 5] = 2$.

d) Determinar si G tiene un árbol generador y, en su caso, calcularlo.

No puede tenerlo pues no es conexo.

e) Sea Q una forma proposicional que involucra las variables proposicionales de V . Definimos una relación R en V de la siguiente manera: $(a, b) \in R$ si y solamente si $(a : V) \wedge (Q : V)$ implica necesariamente que $b : V$. Demostrar que es una relación reflexiva y transitiva. Encontrar valores de Q que muestren que no necesariamente es simétrica.

Es reflexiva puesto que si $a : V$ y $Q : V$ en particular $a : V$.

Es transitiva puesto que sabemos si $a : V$ y $Q : V$ entonces $b : V$. Ahora si $b : V$ y $Q : V$ entonces $c : V$. De este modo si $a : V$ y $Q : V$ se tiene que $c : V$.

No es necesariamente simétrica. Tomamos $Q = (p \Rightarrow q)$. Entonces $p : V$ y $Q : V$ implica que $q : V$, de modo que $(p, q) \in R$. Sin embargo $Q : V$ si $q : V$ y $p : F$ lo que indica que $(q, p) \notin R$.