Matemática Discreta

EXAMEN FINAL

Septiembre 2005

LADE +ITIG

Fecha: 19 de septiembre de 2005 **Tiempo: 2 horas y media.**

El examen está formado por cinco problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

Podéis consultar una única hoja A4 resumen de teoría, pero no está permitido el uso de calculadoras.

Ejercicio 1: a) (1 punto) Determina si el siguiente razonamiento es o no es correcto:

Si Supermán quisiera o pudiera prevenir el mal, lo haría. Si no pudiera prevenir el mal, sería incapaz. Si no quisiera, sería malo. Supermán no previene el mal. Si Supermán existiera no sería ni malo ni incapaz. En conclusión: Supermán no existe.

b) (1 punto) Determina (y demuestra por inducción la veracidad de la fórmula) el número de aristas del grafo completo K_n ($n \geq 2$).

Elegimos las siguientes variables proposicionales:

q:= Supermán quiere prevenir el mal,
p:=Supermán puede prevenir el mal,
h:=Supermán previene el mal,
i:=Supermán es incapaz,
p:=Supermán es malo,
e:=Supermán existe.

Con estas notaciones tenemos las hipótesis siguientes:

$H_1 := (q \vee p) \Rightarrow h$,
$H_2 := \neg p \Rightarrow i$,
$H_3 := \neg q \Rightarrow m$,
$H_4 := \neg h$,
$H_5 := e \Rightarrow (\neg m \wedge \neg i)$.

De las cuales debe deducirse la conclusión $T := \neg e$.

Si $H_4 : V$ entonces $h : F$. Así $H_1 : V$ y $h : F$ implica $(q \vee p) : F$, esto es, $q : F$ y $p : F$. De este modo $H_2 : V$ y $p : F$ implica $i : V$. Igualmente $H_3 : V$ y $q : F$ implica $m : V$. Entonces $H_5 : V$, $m : V$, $i : V$ implica $e : F$ y por tanto T. El razonamiento es entonces correcto.

El grafo completo K_n tiene $n(n-1)/2$ aristas. Esta fórmula es verdadera si $n = 2$, donde K_2 tiene una arista. Si la fórmula es cierta para K_{n-1} entonces el número de aristas de K_n es exactamente el número de aristas de K_{n-1} más $n-1$, que corresponden a las adyacentes al último vértice. De este modo K_n tiene $(n-1)+(n-1)(n-2)/2$. Es una comprobación ver que es exactamente $n(n-1)/2$.

Ejercicio 2: (1.5 puntos) Sean M, N dos matrices $n \times n$ de manera que $M_{ij} \in \mathbb{Z}$ (respectivamente N_{ij}) es la correspondiente entrada en la fila i y la columna j de M (respectivamente de N). Construye un algoritmo para calcular el producto $M \times N$.

Construimos el algoritmo lineal $Producto(i, j, M, N)$ que calcula $(M \times N)_{ij}$.

$Producto(i, j, M, N)$
Entrada: i, j números naturales tales que $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$. M y N matrices como las del enunciado.
$P := 0$
For $m = 1$ to n
    $P := P + M_{im}N_{mj}$
Salida: P

De este modo la matriz producto se define llamando a este algoritmo recursivamente:

$Producto(M, N)$
Entrada: M y N matrices como las del enunciado.

For $i = 1$ to n
    For $j = 1$ to n
        $(M \times N)_{ij} := Producto(i, j, M, N)$
Salida: $M \times N$.

(0.5 puntos) Estudiar su complejidad.
La complejidad final es cúbica puesto que se ejecuta n^2 veces un algoritmo lineal.

Ejercicio 3: (a) (1 punto) Determina si los números 1312 y 65 son primos entre sí. Expresa su máximo común divisor según el lema de Bezout.

Como $65 = 5 \times 13$ y $1312 = 2^5 \times 41$ en efecto no hay factores primos comunes distintos de la unidad, así $mcd(65, 1312) = 1$. Y el lema de Bezout garantiza la existencia de números enteros a, b tales que $1 = 65a + 1312b$. En concreto $a = 545$ y $b = -27$ sirven.

(b) (1 punto) En tres días sucesivos se recibe un pedido de la misma cantidad de bolígrafos. El primer día llegan empaquetados en paquetes de 10 y 3 bolígrafos sueltos. El segundo día llegan en paquetes de 11 y 5 bolígrafos sueltos. El tercer día llegan en paquetes de 13 y 4 bolígrafos sueltos. Determinar si se puede saber con exactitud el número de bolígrafos recibidos cada día. Si el número recibido es inferior a 10.000, ¿qué posible número de bolígrafos se ha recibido cada día?

Se forma un sistema de congruencias lineales:
$x \equiv 3 \, mod \, 10$
$x \equiv 5 \, mod \, 11$
$x \equiv 4 \, mod \, 13$
Como 11 y 13 son primos y 10 no es divisible por ninguno de los dos, el teorema Chino de los restos asegura que hay una solución del sistema, única modulo $10 \times 11 \times 13 = 1430$. Entonces cada solución del sistema es $x = 1083 + 1430k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Como el número de bolígrafos es positivo e inferior a 10.000, tenemos que $1 \leq k \leq 6$. De este modo x puede valer 1083,2513, 3943, 5373, 6803, 8233 ó 9663.

Ejercicio 4: Sea Ω el espacio muestral de un experimento aleatorio, $|\Omega| = n$. En el conjunto de los sucesos S determinamos la siguiente relación: sean

$A, B \in S$ decimos que A se relaciona con B si $p(A|B) > p(A)$, donde $p(A|B)$ es la probabilidad de A condicionada por B.

a) (0.4 puntos) Determinar $|S|$.

Como $S = \mathcal{P}(\Omega)$ entonces $|S| = 2^n$.

b) (0.4 puntos) Verificar si la relación es reflexiva.

Como $p(A|A) = 1$ entonces la propiedad reflexiva se cumple para cada suceso excepto el suceso $A = \Omega$, por tanto no es reflexiva.

c) (0.4 puntos) Determinar si la relación es simétrica.

Si A se relaciona con B entonces $p(A|B) > p(A)$ o equivalentemente

$$p(A \cap B) > p(A)p(B).$$

De este modo

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} > \frac{p(A)p(B)}{p(A)} = p(B)$$

con lo que B se relaciona con A, siendo la relación simétrica.

d) (0.4 puntos) Determinar si es antisimétrica.

No lo es puesto que es simétrica y no necesariamente contenida en la diagonal.

e) (0.4 puntos) Determinar si es transitiva.

No tiene porque serlo. Sea el experimento *extraer aleatoriamente una carta de una baraja*. Sea A el suceso *sacar un caballo*, entonces $p(A) = 1/10$. Sea B e suceso *sacar una figura*, entonces $p(B) = 12/40$. Como $p(A|B) = 1/3 > p(A)$ entonces A se relaciona con B. Sea C el suceso *sacar un rey*. Como $p(B|C) = 1 > p(B)$ entonces B se relaciona con B. Pero $p(A|C) = 0$ de modo que a no se relaciona con C.

Ejercicio 5: Sean

$$G = (\{1, 2, 3\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}, \ H = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{c, d\}\})$$

dos grafos simples.

a) (0.4 puntos) Construye el grafo producto $P = G \times H$.

Sea $P = (V, E)$. Entonces $V = \{1, 2, 3\} \times \{a, b, c, d\}$, de modo que

$$V = \{(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (2, b), (2, c), (2, d),$$
$$(3, a), (3, b), (3, c), (3, d)\}.$$

Y por la definición de adyacencias se tiene que

$$E = \{\{(1, a), (1, b)\}, \{(1, c), (1, d)\}, \{(2, a), (2, b)\}, \{(2, c), (2, d)\},$$
$$\{(3, a), (3, b)\}, \{(3, c), (3, d)\}, \{(1, a), (2, a)\}, \{(2, a), (3, a)\},$$
$$\{(1, b), (2, b)\}, \{(2, b), (3, b)\}, \{(1, c), (2, c)\}, \{(2, c), (3, c)\},$$
$$\{(1, d), (2, d)\}, \{(2, d), (3, d)\}\}.$$

b) (0.4 puntos) Construye una matriz de adyacencias de P.

Con el orden establecido en V tenemos:

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

c) (0.4 puntos) Determina si P es Euleriano.

No lo es pues hay vértices de grado impar.

d) (0.4 puntos) Determina si P es conexo.

No lo es pues no hay ningún camino que una el vértice $(1, a)$ con el vértice $(1, d)$. Se puede observar que si $H' = (\{a, b\}, \{\{a, b\}\})$ entonces $G \times H'$ es una componente conexa de $G \times H$.

e) (0.4 puntos) Determina si P es un árbol.

No puede serlo pues no es conexo.