Matemática Discreta

SOLUCIONES DEL EXAMEN PARCIAL

Diciembre 2003

Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas (tarde)

---

1) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_1 = & 4 \\ a_2 = & 10 \\ a_n = & 4a_{n-1} - 3a_{n-2} \quad (n \geq 3) \end{cases}.$$

Utiliza el método de demostración por inducción completa para verificar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\quad a_n = 3^n + 1$.

Base de inducción: $a_1 = 3 + 1$, $a_2 = 9 + 1$ y

$$a_3 = 4a_2 - 3a_1 = 40 - 12 = 28 = 3^3 + 1.$$

Paso de inducción:
Si $a_k = 3^k + 1$ para $1 \leq k \leq n$,

$$a_{n+1} = 4a_n - 3a_{n-1} = 4(3^n + 1) - 3(3^{n-1} + 1) = (4-1)3^n + (4-3) = 3^{n+1} + 1.$$

2) Sean "$mcd(b, c)$" un algoritmo que halla el máximo común divisor entre dos números enteros, $a = a_1, a_2, \cdots, a_n$ una lista de n números naturales y p un número natural mayor que 1. Dado el algoritmo:

ENTRADA: $a_1, a_2, \cdots, a_n;\ p$
j:=0,
  For i = 1 to n
    If $mcd(a_i, p) = 1$ then
      j:=j+1
      $b_j := a_i$
  If j>0 then $b := b_1, b_2, \cdots, b_j$ else b:= *no hay*
SALIDA: b

a)(4 puntos) Determina qué problema resuelve el algoritmo dado.
Si b_k es un elemento de la lista b, ¿podemos afirmar que la congruencia $xb_k \equiv 1 \quad mod p$ tiene solución?

El algoritmo dado tiene como salida la lista de los elementos de a que son relativamente primos con p y, entonces, son invertibles módulo p.

b)(1 punto) Calcula la complejidad del algoritmo dado.

La complejidad de este algoritmo es lineal: en el peor de los casos todos los elementos de la lista a son invertibles módulo p y hay un número constante de operaciones que se repite n veces.

3) Si existen, halla todas las soluciones enteras del siguiente sistema de congruencias:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \quad mod 4 \\ x \equiv 3 \quad mod 7 \\ x \equiv 5 \quad mod 15. \end{cases}$$

Siendo $mcd(4,7) = 1$, $mcd(4,15) = 1$, $mcd(7,15) = 1$, podemos aplicar el teorema chino del resto para hallar la única solución módulo $P = 4 \times 7 \times 15 = 420$:

$$x_0 = 1 \times q_1 \times 105 + 3 \times q_2 \times 60 + 5 \times q_3 \times 28,$$

donde $105 \times q_1 \equiv 1 \quad mod 4, \quad 60 \times q_2 \equiv 1 \quad mod 7, \quad 28 \times q_3 \equiv 1 \quad mod 15,$ es decir,

$$1 \times q_1 \equiv 1 \quad mod 4, \quad 4 \times q_2 \equiv 1 \quad mod 7, \quad 13 \times q_3 \equiv 1 \quad mod 15.$$

Se sigue que $q_1 = 1$, $q_2 = 2$, $q_3 = 7$ y

$$x_0 = 1 \times 1 \times 105 + 3 \times 2 \times 60 + 5 \times 7 \times 28 =$$
$$= 105 + 360 + 980 = 105 + 360 + 140 \quad mod 420 =$$
$$= 605 \quad mod 420 = 185 \quad mod 420.$$

Las soluciones del sistema dado son los números enteros de la forma

$$x = 185 + 420k, \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$