Cálculo: Soluciones del examen final de septiembre

(LADE-ITIG, ITIS, ITIG, 2005-2006)

Fecha: 7 de septiembre de 2006 **Tiempo**: 3 horas

Ejercicio 1: Estudia la divergencia, convergencia absoluta o convergencia condicional de las siguientes serie numéricas:

a) (10 puntos) $\sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(\frac{n+1}{n} \right)^n - \frac{2n}{n+1} \right]^{-n}$,

Si $n > 1$, se verifica que

$$\left(\frac{n+1}{n} \right)^n > \frac{n+1}{n} > \frac{2n}{n+1}$$

y, por tanto, los términos de la serie son positivos y podemos aplicar el criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n - \frac{2n}{n+1}} = \frac{1}{e-2} > 1, \qquad (2 < e < 3).$$

Se sigue que la serie diverge.

b) (6 puntos) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{8^{n+2}}{5^n}$.

Esta serie también es de términos positivos y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8^{n+2}}{5^n} = 64 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{8}{5} \right)^n = \infty.$$

Siendo el límite anterior no nulo, la serie diverge.

Ejercicio 2: Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\, y^5}{(x^2+y^2)^3} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

a) (6 puntos) Estudia la continuidad de $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$,

Para que la función $f(x,y)$ sea continua en $(0,0)$ tiene que ser

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Usando coordenadas polares se obtiene que

$$|f(\rho cos(\theta), \rho sen(\theta)) - 0| = \left| \frac{\rho^2 cos^2(\theta) \rho^5 sen^5(\theta)}{\rho^6} \right| \leq \rho.$$

Siendo $\lim_{\rho\to 0} \rho = 0$, la función $f(x,y)$ es continua en $(0,0)$ por el criterio de la función mayorante.

b) (7 puntos) estudia la existencia de las derivadas parciales de $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$,

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0.$$

Las derivadas parciales existen en $(0,0)$ y son nulas.

c) (7 puntos) determina si $f(x,y)$ es diferenciable en el punto $(0,0)$.

Si $f(x,y)$ fuese diferenciable en el punto $(0,0)$, su diferencial tendría que ser nula por la identidad:

$$df(0,0)(x,y) = \langle \nabla f(0,0), (x,y) \rangle = 0.$$

Para verificar que se obtiene una contradicción, es decir, que $f(x,y)$ no es diferenciable en el punto $(0,0)$, podemos usar los siguientes dos métodos.

1) Por definición de diferencial, el siguiente límite tendría que ser nulo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-df(0,0)(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\,y^5}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)^3}.$$

Ahora, pasando a coordenadas polares, se verifica que el límite no existe, ya que depende del valor del argumento θ:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\,y^5}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)^3} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 cos^2(\theta)\,\rho^5 sen^5(\theta)}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} cos^2(\theta)\,sen^5(\theta).$$

2) Por las propiedades de la diferencial, dada una dirección (u_1,u_2), la relativa derivada direccional en $(0,0)$ tendría que ser nula, pero en general no lo es:

$$0 = df(0,0)(u) = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(hu_1,hu_2)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^7 u_1^2 u_2^5}{h^7} = u_1^2 u_2^5.$$

Este límite no es nulo si consideramos, por ejemplo, la dirección $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Ejercicio 3: (16 puntos) Sea D el dominio del primer cuadrante del plano real determinado por las gráficas de las ecuaciones

$$y=2, \quad y=x \quad \text{y} \quad x\,y=1.$$

Calcula la integral doble

$$\int\int_D x^2+y^2 \; dx\,dy.$$

El dominio de integración se puede describir como

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le y\le 2,\ \frac{1}{y}\le x\le y\}.$$

Por el teorema de Fubini,

$$\int\int_D x^2+y^2\; dx\,dy = \int_1^2 (\int_{\frac{1}{y}}^{y} x^2+y^2\; dx)\; dy = \int_1^2 (\frac{1}{3}x^3+xy^2)\Big|_{\frac{1}{y}}^{y}\; dy =$$

$$= \int_1^2 \frac{y^3}{3} - \frac{1}{3\,y^3} + y^3 - y\,dy = \int_1^2 \frac{4\,y^3}{3} - \frac{y^{-3}}{3} - y\,dy =$$

$$= \frac{y^4}{3} + \frac{y^{-2}}{6} - \frac{y^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{16}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{24} - \frac{1}{6} - 2 + \frac{1}{2} = \frac{21}{8}.$$

Ejercicio 4: (16 puntos) Resuelve el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y\,cos(x) + 2\,cos(x) \\ y(0) = 6. \end{cases}$$

La ecuación dada es de variables separables y se puede reescribir como:

$$\frac{y'}{y+2} = cos(x).$$

Por tanto,

$$\int \frac{y'}{y+2}\,dx = \int cos(x)\,dx,$$

$$ln(y+2) = sen(x) + c,$$

$$y + 2 = k\,e^{sen(x)}$$

y la solución general de la ecuación es

$$y = k\,e^{sen(x)} - 2 \qquad (k \in \mathbb{R}).$$

Si $6 = y(0) = k - 2,$ la solución del problema de Cauchy es

$$y = 8\,e^{sen(x)} - 2.$$

Ejercicio 5: Sean

$$\{x_0 = 0,\, x_1 = \frac{1}{3},\, x_2 = \frac{2}{3},\, x_3 = 1\}$$

un soporte del intervalo $[0,1]$ y

$$\{f_0 = 2, f_1 = 4,\, f_2 = 2,\, f_3 = 8\}$$

los valores de una función $f(x)$ en los puntos del soporte dado.

a) (4 puntos) Calcula las diferencias divididas y el polinomio interpolador de Lagrange de $f(x)$ para el soporte dado.

Las diferencias divididas de $f(x)$ son las de la tabla 1.

El polinomio interpolados de Lagrange es:

$$p_3(x) = 2 + 6\,x - 8\,x\,(x - \frac{1}{3}) + 54\,x\,(x - \frac{1}{3})(x - \frac{2}{3}) = 2 + 24\,x - 72\,x^2 + 54\,x^3.$$

Verifiquemos que el polinomio hallado sea el polinomio de Lagrange:

$$p_3(0) = 2, \quad p_3(\frac{1}{3}) = 4, \quad p_3(\frac{2}{3}) = 2, \quad p_3(1) = 8.$$

b) (4 puntos) Usa el polinomio interpolador calculado en el apartado a para aproximar $\int_0^1 f(x)\,dx$.

x_i	f_i	$[\ \ ]_1$	$[\ \ ]_2$	$[\ \ ]_3$
0	2			
		$f[x_1,x_0]=6$		
$\frac{1}{3}$	4		$f[x_2,x_1,x_0]=-18$	
		$f[x_2,x_1]=-6$		$f[x_3,x_2,x_1,x_0]=54$
$\frac{2}{3}$	2		$f[x_3,x_2,x_1]=36$	
		$f[x_3,x_2]=18$		
1	8			

TABLA 1. Diferencias divididas de $f(x)$.

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \int_0^1 p_3(x)\,dx = \int_0^1 2+24\,x-72\,x^2+54\,x^3\,dx =$$

$$= 2\,x+12\,x^2-24\,x^3+\frac{27}{2}\,x^4\Big|_0^1 = \frac{7}{2} = 3,5.$$

c) (4 puntos) Aproxima $\int_0^1 f(x)\,dx$ mediante una integración numérica compuesta obtenida aplicando la fórmula del trapecio en $[x_0,x_1]$ y la fórmula de Simpson en $[x_1,x_3]$.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{3}} f(x)\,dx + \int_{\frac{1}{3}}^1 f(x)\,dx \approx$$

$$\approx \frac{1}{6}(f_0+f_1)+\frac{2}{3}\,\frac{1}{6}\,(f_1+4f_2+f_3) \approx \frac{1}{6}\,6+\frac{1}{9}\,(4+8+8) = 1+\frac{20}{9} = \frac{29}{9} = 3,\bar{2}.$$