CÁLCULO — HOJA 1

INGENIERO TÉCNICO EN INFORMÁTICA DE SISTEMAS

GRUPO DE MAÑANA, MÓSTOLES, 2008-09

(1) De la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se sabe que la sucesión de sumas parciales viene dada por:

$$S_n = \frac{3n+2}{n+4}.$$

Encontrar el término general a_n de la serie y decidir sobre el carácter de dicha serie.

(2) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos. Demostrar que si es convergente entonces también lo es la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$

(3) Decidir, para cada una de las siguientes series, si es convergente o divergente.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+\sqrt{n}}$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$;

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^n}$ para $a > 1$;

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$;

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n^\alpha}$;

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$.

(4) Analizar la convergencia de las siguientes series

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2/2}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \sin\left(\frac{\pi}{3^n}\right)$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)}3^n}{(2n-1)^n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+1)(1+\sqrt{2})...(1+\sqrt{n})}$

(5) Entre las curvas $y = \frac{1}{x^3}$ e $y = \frac{1}{x^2}$, a la derecha del punto de intersección, se han construido segmentos paralelos al eje OY en los puntos de abscisa entera. ¿ Será finita o infinita la suma de las longitudes de dichos segmentos?

(6) Evaluar la suma de las siguientes series:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2-3n-2}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}-2^{n-3}}{4^n}$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

(7) Probar que si las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ (con $a_n \geq 0$ y $b_n \geq 0$) son convergentes, entonces también lo son las series $\sum \sqrt{a_n b_n}$ y $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$.

(8) Se denomina serie aritmético-geométrica a toda serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a+nb)r^n.$$

Probar que cuando $| r |< 1$ esta serie converge y demostrar que en tal caso su suma vale:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a+nb)r^n = \frac{a(1-r)+br}{(1-r)^2}$$

(9) Evaluar la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

(10) Sabiendo que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$, calcular e con un error menor que 10^{-3}.

CÁLCULO — HOJA 2

INGENIERO TÉCNICO EN INFORMÁTICA DE SISTEMAS

GRUPO DE MAÑANA, MÓSTOLES, 2008-09

(1) Hallar la distancia $\mathbb{R}^3$ entre los puntos $(1,1,1)$ y $(3,5,-2)$.

(2) Hallar en $\mathbb{R}^2$ la norma del vector $\bar{v} = 3\bar{e_1} + 4\bar{e_2}$.

(3) Representar los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^2$:

(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \mid x \mid \geq 1, y > 0\}$.

(b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - 2x + y^2 \leq 3\}$.

(c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 \geq 0\}$.

(d) $D = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 / 1 < \rho < 2\}$.

(4) Hallar el dominio de definición de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = \ln(x+y-1)$.

(b) $f(x,y) = \sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.

(c) $f(x,y) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{xy}$.

(d) $f(x,y) = xy + \sqrt{x^2+y^2-R^2} + \sqrt{\ln\left(\frac{R^2}{x^2+y^2}\right)}$ $(R \geq 0$, constante$)$.

(e) $f(x,y) = \tan[(x+y)\pi]$.

(5) Trazar las curvas de nivel de las funciones:

(a) $f(x,y) = x + y$.

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2$.

(c) $f(x,y) = \frac{y}{x^2}$.

(d) $f(x,y) = x^2$.

(6) Hallar, si existen, los límites reiterados y el límite doble para las funciones siguientes en los puntos indicados:

(a) $f(x,y) = \dfrac{xy - x + y}{x+y}$ en $(0,0)$.

(b) $f(x,y) = x\sin\left(\dfrac{1}{y}\right) + y\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $(0,0)$.

(7) Calcular el límite doble en $(0,0)$ para la función

$$f(x,y) = \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{1-\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

(8) Demostrar que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+2y^2}$ no existe mediante el cálculo de los límites radiales y de los límites reiterados.

(9) Hallar en el punto $(0,0)$ los límites reiterados, radiales y según las direcciones $y = \lambda x^\alpha$ (con $\alpha > 0$), de la función $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$. De los resultados obtenidos, decidir que se puede decir sobre el límite doble.

(10) Calcular los límites radiales y el límite doble en $(0,0)$ de la función

$$f(x,y)=\frac{x^2y^3}{x^4+y^4}.$$

(11) Dada la función $f(x,y)=\dfrac{ax+y+bx^2}{\sin(y)+\ln(1+x)}$:

i) Determinar el valor de a para que los límites reiterados coincidan en el punto $(0,0)$.

ii) Utilizando el valor calculado para a, determinar el valor de b para que los límites radiales en $(0,0)$ coincidan siempre.

(12) Hallar en $(0,0)$ los límites reiterados y el límite doble de la función

$$f(x,y)=xy\sin\left(\frac{\pi}{x^2+y^2}\right).$$

(13) Calcular $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\frac{(x-1)^2(y+1)}{(x-1)^4+(y+1)^2}$.

(14) Calcular $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^\alpha y^\beta}{(x^2+y^2)^\gamma}$, con α, β y γ números reales, discutiendo el resultado en función de los valores que tomen estos parámetros.

(15) Dada la función

$$f(x,y)=\frac{x^3-y^2}{1-\cos(x)+y}$$

discutir si existe o no el límite doble en el punto $(0,0)$.

(16) Estudiar la continuidad de la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^5}{(x^2+y^2)^3} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

CÁLCULO — HOJA 3

INGENIERO TÉCNICO EN INFORMÁTICA DE SISTEMAS

GRUPO DE MAÑANA, MÓSTOLES, 2008-09

(1) Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en el punto $(0,0)$ de las siguientes funciones reales de dos variables:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} xy \sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(2) Estudiar la continuidad y la existencia de derivadas parciales para la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{xy}-1}{xy} & \text{si } x \neq 0 \quad \text{e} \quad y \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0 \quad \text{o} \quad y = 0. \end{cases}$$

(3) Hallar las derivadas parciales de la función

$$f(x,y,z) = x^2 y \cos z - z \sin(x) \cos(y)$$

(4) Probar que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y-2x^3}{x^2+y^4} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

tiene todas sus derivadas direccionales en el origen bien definidas pero no es diferenciable en dicho punto.

(5) Hallar la derivada direccional en cualquier dirección y en el punto $(0,0)$ de la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(6) Hallar la matriz jacobiana y el jacobiano (cuando sea posible) para las siguientes funciones vectoriales:

(a) $\bar{f}(x,y,z) = (f_1, f_2, f_3)^T$, $f_1 = x + 2y$, $f_2 = 2xy + y^2$, $f_3 = xy + z^2$.
(b) $\bar{f}(x,y,z) = (f_1, f_2)^T$, $f_1 = xyz$, $f_2 = x^2 + y^2 + z^2$.

(7) Las derivadas direccionales en el punto $(1,1)$ y en las direcciones $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\theta = \frac{\pi}{6}$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$ de la función $f(x,y)$ son respectivamente $2, 0$ y 1. Decidir si la función es diferenciable en $(1,1)$.

(8) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2 + \sin(xy)$ en el punto $(0,2,4)$.

(9) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + 2y^2$ que es paralelo al plano $x + 2y - z = 10$.

(10) Siendo $f(x,y) = x^2 + y^2$ determinar $\dfrac{df}{dt}$, donde $x = \sin(t)$ e $y = t^3$.

(11) Hallar $\dfrac{\partial f}{\partial \xi}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial \eta}$ siendo $f(x,y) = x^2y - xy^2$ si $x = \xi\eta$ y $y = \xi/\eta$.

(12) Hallar $\dfrac{df}{dt}$ siendo $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$, $x = e^{-t}$ e $y = e^t$.

(13) Si $u = f(x,y)$, $x = \rho\cos(\theta)$ e $y = \rho\sin(\theta)$, probar que se satisface

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2.$$

(14) Dada la función $f(x,y) = e^x\sin(y) + e^y\sin(x)$, hallar su vector gradiente en un punto arbitrario de $\mathbb{R}^2$. Hallar la derivada direccional en el punto $(0,0)$ y en la dirección $\theta = \pi/4$ y determinar también una dirección en la cual la derivada direccional en el origen valga 0. Calcular también la diferencial de la función.

CÁLCULO — HOJA 4

INGENIERO TÉCNICO EN INFORMÁTICA DE SISTEMAS

GRUPO DE MAÑANA, MÓSTOLES, 2008-09

(1) Determinar el polinomio de Taylor de segundo orden en un entorno del punto $(-2, 1)$ para la función $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$.

(2) Determinar el polinomio de McLaurin de tercer orden para la función $f(x, y) = e^x \sin(y)$.

(3) Determinar el polinomio de McLaurin de segundo orden para la función $f(x, y) = \dfrac{\cos(x)}{\cos(y)}$.

(4) Determinar el polinomio de Taylor de tercer orden en un entorno del punto $(1, -1)$ para la función $f(x, y) = e^{(x+y)}$.

(5) Hallar los máximos y mínimos relativos de la función $f(x, y) = x^2 - 4xy^2 + 4y^4$.

(6) Hallar los extremos relativos, si existen, de la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(7) Determinar los puntos críticos y analizarlos para la función $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

(8) Determinar si los puntos $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ son puntos críticos de la función $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$. En caso de serlo indicar el tipo de punto crítico que es cada uno de ellos.

(9) Determinar y analizar los puntos críticos de la función:

$$f(x, y) = (x^2 - y^2)\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

(10) Decidir si $(0, 0)$ es un punto crítico para la función

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \cos(x + 2y)$$

y en caso afirmativo determinar qué tipo de punto crítico es.

(11) Resolver el problema de optimización siguiente: obtener los extremos de la función $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 2)^2$ sujetos a la condición $x + y = 6$.

(12) La temperatura de una placa en un punto (x, y) cualquiera viene dada por la función $T(x, y) = 25 + 4x^2 - 4xy + y^2$. Una alarma térmica, situada sobre los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, se dispara a temperaturas superiores a 180 grados o inferiores a 20 grados. Decidir si se disparará la alarma.

(13) Buscar los extremos de la función $f(x, y) = 4xy$ cuando x e y están sujetas a la restricción $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

(14) Buscar los extremos de la función $f(x, y) = x^2 + \ln(y)$ cuando x e y están sujetas a la restricción $2x^2 + y^2 = 9$.

CÁLCULO — HOJA 5

INGENIERO TÉCNICO EN INFORMÁTICA DE SISTEMAS

GRUPO DE MAÑANA, MÓSTOLES, 2008-09

(1) Considerar el rectángulo $I = [-1, 1] \times [-1, 2]$. Demostrar que

$$1 \leq \int\int_I \frac{dxdy}{1 + x^2 + y^2} \leq 6$$

(2) Calcular $\displaystyle\int\int_I \frac{1}{x}\, dxdy$ siendo I el rectángulo $I = [1, 2] \times [1, 3]$.

(3) Calcular $\displaystyle\int\int_I x\, dxdy$ siendo I el rectángulo $I = [b/2, b] \times [0, \pi/2]$, $(b > 0)$.

(4) Calcular $\displaystyle\int\int_D xy\, dxdy$ siendo D la región del primer cuadrante encerrada entre las parábolas de ecuaciones $y^2 = x$ e $y = x^2$.

(5) Calcular $\displaystyle\int\int_D (x + y)\, dxdy$ siendo D el recinto que viene definido mediante $D = \{(x, y)/y \leq x \leq 3y, 1 \leq y \leq 2\}$.

(6) Hallar el área encerrada por una elipse de semiejes a y b.

(7) Calcular el área del dominio limitado por la recta $x = 0$ y las curvas $y = \sin(x)$ e $y = \cos(x)$.

(8) Calcular $\displaystyle\int\int_D \sqrt{2ax - x^2 - y^2}\, dxdy$ (con $a > 0$), cuando D es el dominio limitado por la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2ax = 0$. Nota: Utilizar el cambio de variables $x = a + \rho\cos(\theta)$, $y = \rho\sin(\theta)$.

(9) Calcular el área limitada a la derecha de la recta $x = 1$ por la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 2.

(10) Determinar el volumen de una esfera de radio R utilizando integración doble.

(11) Hallar el área comprendida entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 2x$ e $x^2 + y^2 = 4x$ y las rectas $y = x$ e $y = 0$.

(12) Hallar el volumen limitado inferiormente por el paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ y superiormente por el plano $z = 4$.

(13) Calcular $\int\int_D xe^y \, dxdy$ siendo D la región limitada por las rectas de ecuaciones $x = 1$, $y = 0$ y la parábola $y = x^2$.

(14) Calcular $\int\int_D e^{x^2+y^2} \, dxdy$ donde D es el círculo interior a la circunferencia de centro el origen y radio $r = 3$.

(15) Calcular el volumen de la parte del cilindro $x^2 + y^2 = b^2$ comprendida entre los planos $y + z = a^2$ y $z = 0$.

(16) Calcular el área encerrada por la cardiode de ecuación $r = a(1 + \cos(\theta))$.

(17) Hallar el área del dominio del primer cuadrante que está limitado por las rectas $y = 3x$, $x + y = 4$ y por la curva $2y = x^2$.

(18) Calcular $\int\int_I \mid y - e^{-x} \mid \, dxdy$ siendo I el rectángulo $I = [0, 1] \times [0, 1]$.

(19) Determinar $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx$.

(20) Sea D la región del primer cuadrante delimitada por las curvas $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 - y^2 = 4$ y $x^2 - y^2 = 1$. Hallar $\int\int_D xy \, dxdy$.

CÁLCULO — HOJA 6

INGENIERO TÉCNICO EN INFORMÁTICA DE SISTEMAS

GRUPO DE MAÑANA, MÓSTOLES, 2008-09

(1) Verificar que $y(x) = Cx + C^2$ es la solución general de la ODE $y = xy' + (y')^2$. Determinar el valor de K para que la función $y(x) = Kx^2$ sea solución singular de dicha ecuación.

(2) Decidir si las funciones dadas son soluciones de las ODEs que las acompañan:
  (a) $y(x) = x + e^{-x}$, $\qquad y' + y = x + 1$.
  (b) $y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-2x}$, $\qquad y'' - 2y' - 8y = 0$.
  (c) $y(x) = C_1 e^{-x^2} + C_2 e^{x^2}$, $\qquad xy'' - y' - 4x^3 y = 0$.
  (d) $y(x) = x + \frac{1}{C-x}$, $\qquad y' = y^2 - 2xy + 1 + x^2$.

(3) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales separables:
  (a) $xy' + y = y^2$
  (b) $3e^x \tan(y) + (2 - e^x)\sec^2(y) y' = 0$
  (c) $(1 + y^2)e^{2x} - (1 + y^2)e^y y' - (1 + y)y' = 0$
  (d) $e^y(1 + x^2)y' - 2x(1 + e^y) = 0$

(4) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas
  (a) $(x - y)y - x^2 y' = 0$
  (b) $y' = \frac{y-x}{y+x}$
  (c) $x - y\cos\left(\frac{y}{x}\right) + x\cos\left(\frac{y}{x}\right) y' = 0$

(5) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:
  (a) $xy' + (1 - x)y = xe^x$
  (b) $xy' - y = \ln(x)$
  (c) $\cos(x)y' - \sin(x)y = \sin(2x)$

(6) Comprobar que las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas y resolverlas:
  (a) $y' = -\dfrac{x^3 + xy^2}{x^2 y + y^3}$
  (b) $(2x^3 - xy^2 - 2y + 3) - (x^2 y + 2x)y' = 0$

(7) Demostrar que las siguientes ecuaciones diferenciales no son exactas, pero sí lo son una vez multiplicadas por los factores integrantes $I(x, y)$ dados. Utilizar este hecho para resolverlas.
  (a) $(3x + 2y + y^2) + (x + 4xy + 5y^2)y' = 0$, $\qquad I(x, y) = x + y^2$
  (b) $(x^2 + y^2 + 1)dx - 2xydy = 0$, $\qquad I(x, y) = \dfrac{1}{(y^2 - x^2 + 1)^2}$

(c) $(2xy^2 - 3y^3) + (7 - 3xy^2)y' = 0, \qquad I(x,y) = I(y)$
(d) $(2x - x^2 - y^2)dx + 2ydy = 0, \qquad I(x,y) = I(x)$

(8) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes:
(a) $4y'' - 5y' = 0$
(b) $y'' - 5y' + 3y = 0$
(c) $y'' + 4y' + 4y = 0$
(d) $y'' + 4y = 0$
(e) $y'' - 4y' + 5y = 0$
(f) $y''' - 7y' + 6y = 0$
(g) $y''' - y'' - 8y' + 12y = 0$
(h) $y''' - 4y'' + 13y' = 0$
(i) $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0$
(j) $y^{(4)} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0$
(k) $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' = 0$

(9) Para cada conjunto de funciones, encontrar la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes reales, y de menor orden, tal que una combinación lineal de las funciones con coeficientes arbitrarios sea la solución general:
(a) $y_1 = e^x, \qquad y_2 = e^{-x}$
(b) $y_1 = e^{2x}, \qquad y_2 = e^{5x}$
(c) $y_1 = e^x\cos(2x), \qquad y_2 = e^x\sin(2x)$
(d) $y_1 = e^{4x}, \qquad y_2 = e^{-2x}, \qquad y_3 = e^x$
(e) $y_1 = 1, \qquad y_2 = x, \qquad y_3 = x^2$
(f) $y_1 = \cos(x) \qquad y_2 = \sin(x), \qquad y_3 = e^{2x}$
(g) $y_1 = e^{x^2}, \qquad y_2 = e^{-x^2}$
(h) $y_1 = \cos(x^2), \qquad y_2 = \sin(x^2)$
Indicación: En los últimos dos apartados, hacer el cambio de variables $t = x^2$, encontrar la ecuación diferencial para $y(t)$, y luego deshacer el cambio.

(10) Para cada de las siguientes funciones, encontrar su operador anulador, con coeficientes constantes reales y de menor orden:
(a) $5e^{4x}$
(b) $x + 3e^{3x}$
(c) $4e^{3x} - 5e^{-4x}$
(d) $2\sin(3x) + 6$
(e) $6x\cos(2x)$
(f) xe^{-2x}
(g) $xe^{-2x} + 7e^{5x}$

(11) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes:

(a) $y'' + 3y' + 2y = \cos(2x)$
(b) $y'' + y = 3x^2 + 4$
(c) $D(D - 1)y = \sin(x)$
(d) $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(1 + \sin(2x))$
(e) $y'' - 6y' + 9y = 25e^x \sin(x)$
(f) $y'' - 5y' + 6y = xe^x$
(g) $y'' + y = x\sin(x)$
(h) $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$
(i) $y''' - 4y' = xe^{2x} + \sin(x) + x^2$

(12) Dada la ecuación $y'' + ay = 0$, determinar el valor de a para que el problema de contorno dado por la ecuación junto con $y(0) = y(1) = 0$, admita una solución distinta de la trivial $y(x) = 0$.

(13) La población de cuervos en un bosque aumenta, en un instante cualquiera, con una rapidez proporcional al número de ejemplares. En 1990 la población de cuervos era de 500, y en el 2000 de 575. ¿Cuántos cuervos habrá en el 2020?

(14) Se lanza verticalmente desde el suelo un objeto de masa m con velocidad inicial v_0. Encontrar la expresión para la altura si la resistencia del aire es proporcional a la velocidad, siendo k la constante de proporcionalidad.

(15) En un circuito en serie LRC con inductancia $L = 0.05\,h$, resitencia $R = 2\,\Omega$, $C = 0.01\,f$ y voltaje $E(t) = 0$, la carga inicial del condensador es de $5\,C$ y la intensidad de la corriente inicial es nula. Encontrar el valor de la carga cuando han transcurrido $0.01\,s$.

(16) El isótopo radioactivo de plomo Pb-209 se desintegra en un instante cualquiera, con una rapidez proporcional a la cantidad presente en dicho instante, y tiene una semivida de 3.3 horas. Si inicialmente hay 1 gramo de plomo, ¿cuánto tiempo transcurrirá para que se desintegre el 90% de dicho elemento? Nota: la semivida es el tiempo necesario para que se desintegre la mitad de la cantidad inicial de isótopo.

(17) Una masa de $30\,kg$ se cuelga de un muelle de constante de elasticidad $K = 750\,N/m$ y se lleva al reposo. Si se supone que la posición de la masa en el instante inicial es cero, encontrar su posición en cualquier otro instante de tiempo suponiendo que se le aplica una fuerza de $20\sin(2t)\,N$.