

## TEMA 9 - INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

### 1. Introducción.

#### **Definición.**

Se denomina ecuación diferencial a cualquier ecuación en la que aparecen relacionadas:

- \*) Una o varias variables independientes.
- \*) Una variable dependiente de ella o ellas.
- \*) Derivadas de la variable dependiente respecto a una o más variables independientes.

#### Notación:

A la variable independiente, cuando sólo sea una, se la representará por  $x$  (o por  $t$ ). En el caso de haber más de una se las denotará con subíndices  $x_1, \dots, x_m$ .

A la variable dependiente, también llamada función incógnita o función solución, se la denotará por  $y(x)$ , o cuando no haya lugar a confusión, simplemente por  $y$ .

#### **Definición.**

Se denomina **ecuación diferencial ordinaria** (e.d.o.) a toda ecuación diferencial en la que la variable dependiente depende sólo de una variable independiente.

#### **Definición.**

Se denomina **ecuación diferencial en derivadas parciales** a toda ecuación diferencial en la que la variable dependiente depende de más de una variable independiente.

#### **Definición.**

Se denomina **orden** de una e.d.o. al mayor orden de derivación de la variable dependiente que interviene en la e.d.o..

#### **Definición.**

Se denomina **grado** de una e.d.o. al mayor exponente, si es un número natural, al que está elevada la derivada de mayor orden de la variable dependiente que interviene en la e.d.o..

#### **Definición.**

Se denomina **e.d.o. lineal de orden  $n$**  a toda e.d.o. de orden  $n$  en la que la derivada de orden  $n$  de la variable dependiente,  $y^{(n)}(x)$  depende linealmente de  $y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)$ . En otros términos estas ecuaciones serán de la forma:

$$a_n(x).y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x).y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x).y'(x) + a_0(x).y(x) = b(x)$$

donde las  $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$  y  $b(x)$  son funciones cualesquiera de la variable independiente  $x$ .

#### **Definición.**

Se denomina **solución general** de una e.d.o. de orden  $n$  a la familia de funciones dependientes de  $n$  parámetros que verifican la e.d.o..

**Definición.**

Se denomina **solución singular** de una e.d.o. de orden  $n$  a toda función  $y(x)$  que verifique la e.d.o. y no pertenezca a la familia de funciones que constituyen la solución general de la e.d.o..

**Definición.**

Se denomina **solución particular** de una e.d.o. de orden  $n$  a toda función  $y(x)$  que verifica la e.d.o..

**Definición.**

Se denomina **problema de Cauchy** al problema:

“Siendo  $I$  un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ , y siendo  $f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$  una función conocida, definida en  $I \times \mathbb{R}^n$ , encontrar una función:

$$y: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow y(x)$$

verificando la e.d.o.:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad \forall x \in I$$

y la condiciones:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

donde  $x_0 \in I$  e  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  son  $n$  valores conocidos”.

NOTA:

En los problemas de Cauchy que aparecen en las aplicaciones prácticas, en ocasiones la variable  $x$  representa el tiempo y el punto  $x_0$  en el que se fijan los valores de la función y sus derivadas es el extremo izquierdo del intervalo  $I$  (es decir el “instante inicial”). Por eso en dichas ocasiones este tipo de problemas se conoce también con el nombre de problemas de valores iniciales.

**Definición.**

Siendo  $I$  un intervalo abierto de la recta real, y siendo  $f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$  una función conocida, definida en  $I \times \mathbb{R}^n$ , se denomina **problema de contorno** al problema de encontrar una función:

$$y: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow y(x)$$

solución de la e.d.o.:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad \forall x \in I$$

y tal que la función y/o algunas de sus derivadas toman valores predeterminados en puntos diferentes del intervalo  $I$ .

**Definición.**

Se denomina **curva integral** de una e.d.o. a la gráfica de cualquier solución de la e.d.o..

**Teorema.**

Dada la e.d.o. de primer orden  $y' = f(x, y)$ , si  $f(x, y)$  y  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  son funciones continuas sobre un rectángulo  $D$  de  $R^2$ , entonces por cada punto  $(x_0, y_0)$  de  $D$  pasa una única curva integral.

NOTAS:

1ª) Una e.d.o. puede expresarse de tres formas:

Forma explícita (o forma normal): La derivada de mayor orden aparece despejada e igualada a una función de la variable independiente, la función incógnita y sus derivadas hasta orden  $(n-1)$ :  $y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$

Forma implícita: En forma de una ecuación:  $F(x, y, \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$

Forma diferencial: En forma de una ecuación en la que intervienen las diferenciales de la función incógnita y de la variable independiente.

2ª) Dada una familia de funciones dependientes de  $n$  parámetros, para obtener la e.d.o. de orden  $n$  de la que dicha familia es solución basta con despejar los  $n$  parámetros de la familia de las expresiones de las derivadas hasta orden  $n$  de las funciones que forman la familia dada y, una vez expresados los parámetros en función de las derivadas de la función incógnita, sustituir en la expresión de la familia de funciones.

3ª) Al igual que se ha hablado de las ecuaciones diferenciales ordinarias, pueden considerarse sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Para ello debe considerarse que la función incógnita es una función vectorial:

$$\bar{y}: I \rightarrow R^m$$

$$x \rightarrow \bar{y}(x) = \begin{Bmatrix} y_1(x) \\ \mathbf{M} \\ y_m(x) \end{Bmatrix}$$

y que la función del segundo miembro del sistema de e.d.o. es una función vectorial definida sobre  $I \times (R^m)^n$ , es decir:

$$f: I \times (R^m)^n \rightarrow R^m$$

$$(x, \bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n-1)}) \rightarrow \bar{f}(x, \bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n-1)}) = \begin{Bmatrix} \bar{f}_1(x, \bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n-1)}) \\ \mathbf{M} \\ \bar{f}_m(x, \bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n-1)}) \end{Bmatrix}$$

Con ello el sistema de e.d.o. se escribe:

$$\bar{y}^{(n)} = \bar{f}(x, \bar{y}, \dots, \bar{y}^{(n-1)})$$

o en forma desarrollada:

$$y_1^{(n)} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_m, y_1', y_2', \dots, y_m', \dots, y_1^{(n-1)}, y_2^{(n-1)}, \dots, y_m^{(n-1)})$$

$$y_2^{(n)} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_m, y_1', y_2', \dots, y_m', \dots, y_1^{(n-1)}, y_2^{(n-1)}, \dots, y_m^{(n-1)})$$

$$\mathbf{M}$$

$$y_m^{(n)} = f_m(x, y_1, y_2, \dots, y_m, y_1', y_2', \dots, y_m', \dots, y_1^{(n-1)}, y_2^{(n-1)}, \dots, y_m^{(n-1)})$$

4ª) Una e.d.o. de orden  $n$  puede transformarse en un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Así la e.d.o.:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

se transforma en el sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

$$z_1' = g_1(x, z_1, z_2, \dots, z_n)$$

$$z_2' = g_2(x, z_1, z_2, \dots, z_n)$$

M

$$z_n' = g_n(x, z_1, z_2, \dots, z_n)$$

haciendo los cambios de variables:

$$z_1 = y, \quad z_2 = z_1' (= y'), \quad z_3 = z_2' (= y''), \quad \dots, \quad z_n = z_{n-1}' (= y^{(n-1)})$$

con lo que la función  $\bar{g}(x, z_1, z_2, \dots, z_n)$  será:

$$g_1(x, z_1, z_2, \dots, z_n) = z_2$$

$$g_2(x, z_1, z_2, \dots, z_n) = z_3$$

M

$$g_{n-1}(x, z_1, z_2, \dots, z_n) = z_n$$

$$g_n(x, z_1, z_2, \dots, z_n) = f(x, z_1, z_2, \dots, z_n)$$

## 2. Resolución de algunas E.D.O. de primer orden.

Una e.d.o. de primer orden la escribiremos, indistintamente, de alguna de las tres formas siguientes:

Forma normal (o explícita):  $y' = f(x, y)$

Forma implícita:  $F(x, y, y') = 0$

Forma diferencial:  $M(x, y).dx + N(x, y).dy = 0$ .

### 2.1. E.D.O. de la forma $y' = f(x)$ .

Su solución general será:

$$y(x) = \int f(x).dx + C$$

donde  $C$  es una constante arbitraria.

#### NOTA:

Este proceso se puede generalizar a las e.d.o. de orden  $n$  de la forma  $y^{(n)} = f(x)$  mediante:

$$y^{(n-1)}(x) = \int f(x).dx + C_1$$

$$y^{(n-2)}(x) = \int \left( \int f(x).dx \right) dx + C_1.x + C_2$$

$$y^{(n-3)}(x) = \int \left( \int \left( \int f(x).dx \right) dx \right) dx + \frac{C_1}{2}.x^2 + C_2.x + C_3 = \int \left( \int \left( \int f(x).dx \right) dx \right) dx + K_1.x^2 + C_2.x + C_3$$

N

$$y(x) = \int \left( \dots \left( \int \left( \int \left( \int f(x).dx \right) dx \right) dx \right) \dots \right) dx + Cte_1.x^{(n-1)} + Cte_2.x^{(n-2)} + \dots + Cte_{n-1}.x + Cte_n$$

**2.2. E.D.O. de primer orden de variables separadas.**

Son e.d.o. de primer orden de la forma:

$$F(x).G(y).dx + H(x).P(y).dy = 0$$

Su resolución se realiza dividiendo por  $G(y).H(x)$  e integrando, con lo que:

$$\int \frac{P(y)}{G(y)}.dy = -\int \frac{F(x)}{H(x)}.dx + C$$

de donde la solución general se obtendrá resolviendo la ecuación  $g(y) + f(x) = C$  donde:

$$g(y) = \int \frac{P(y)}{G(y)}.dy \quad f(x) = \int \frac{F(x)}{H(x)}.dx$$

**NOTA:**

En este proceso se han podido eliminar soluciones que hiciesen que  $G(y).H(x) = 0$ . Por ello otras soluciones de la e.d.o podrían encontrarse entre las funciones  $y(x)$  tales que  $G(y).H(x) = 0$ . Es necesario encontrar tales funciones y comprobar si son solución de la e.d.o. dada.

**2.3. E.D.O. de primer orden homogéneas.****Definición.**

Se dice que la función  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es homogénea de orden  $r$  si se verifica:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^r . f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \forall \lambda$$

**Definición.**

Se dice que la e.d.o.  $M(x, y).dx + N(x, y).dy = 0$  es homogénea si las funciones  $M(x, y)$  y  $N(x, y)$  son funciones homogéneas del mismo orden.

**NOTA:**

Si la e.d.o. se proporciona en la forma  $y' = f(x, y)$ , será homogénea si  $f(x, y)$  es una función homogénea de orden 0.

Una e.d.o. de primer orden homogénea se resuelve mediante el siguiente proceso:

1º) Se realiza el cambio de variable  $y = x.u$  con lo que la e.d.o. se transforma en:

$$\frac{1}{x}.dx + \frac{N(1, u)}{M(1, u) + u.N(1, u)}.du = 0$$

que ya es de variables separadas, siendo  $u$  la función incógnita y  $x$  la variable independiente.

2º) Se resuelve la e.d.o. de variables separadas en  $u$ .

3º) Se deshace el cambio obteniendo  $y(x) = x.u(x)$ .

**NOTA:**

En el proceso de resolución de la e.d.o. de variables separadas se han podido perder algunas soluciones ya que se divide por  $x.[M(1, u) + u.N(1, u)]$ . Es necesario por ello obtener las soluciones de  $[M(1, u) + u.N(1, u)]$  y analizar si de ellas se obtienen otras soluciones de la e.d.o.

**2.4. E.D.O. de primer orden reducibles a homogéneas.**

Son e.d.o. de la forma:

$$y' = f\left(\frac{a.x + b.y + c}{a_1.x + b_1.y + c_1}\right)$$

El método de obtener soluciones depende de si las rectas  $a.x + b.y + c = 0$  y  $a_1.x + b_1.y + c_1 = 0$  son paralelas o no.

a) Caso en que las rectas no son paralelas:

En este caso sea el punto  $(x_0, y_0)$  el punto en que se cortan, es decir la solución del sistema de 2 ecuaciones:

$$\begin{cases} a.x + b.y = -c \\ a_1.x + b_1.y = -c_1 \end{cases}$$

El cambio de variables  $x = X + x_0$ ,  $y = Y + y_0$  transforma la e.d.o. en la e.d.o. homogénea:

$$Y' = f\left(\frac{a.X + b.Y}{a_1.X + b_1.Y}\right)$$

que se resuelve según lo visto en el apartado 2.3. Una vez hallada la solución  $Y(X)$  se deshace el cambio anterior, es decir se reemplaza  $Y$  por  $Y = y - y_0$  y  $X$  por  $X = x - x_0$ .

b) Caso en que las rectas son paralelas.

En este caso se verificará que:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \alpha$$

por lo que el cambio  $u = a.x + b.y$  (es decir  $y = (u - a.x)/b$ ) transforma la e.d.o. en otra de variables separadas de función incógnita  $u$  y de variable independiente  $x$  que se resuelve según lo indicado en el apartado 2.2.. Una vez hallada la función  $u(x)$  se deshace el cambio anterior.

## 2.5. E.D.O. exactas.

### **Definición.**

Se dice que la e.d.o.  $M(x, y).dx + N(x, y).dy = 0$  es **exacta** si existe una función de dos variables  $F(x, y)$  tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \text{ y } \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$$

### **Propiedad.**

Si las funciones  $M(x, y)$  y  $N(x, y)$  son regulares de clase  $C^1(\mathbb{R}^2)$ , la e.d.o.:

$$M(x, y).dx + N(x, y).dy = 0$$

es exacta si y solamente si se verifica que:

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)$$

La resolución de una e.d.o. exacta se obtiene de:

$$dF(x, y) = M(x, y).dx + N(x, y).dy = 0 \Rightarrow F(x, y) = C$$

En cuanto a la expresión de la función  $F(x, y)$  se obtendrá mediante:

$$F(x, y) = \int M(x, y).dx + \int \left( N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \int M(x, y).dx \right) \right) dy$$

o, lo que es equivalente:

$$F(x, y) = \int N(x, y).dy + \int \left( M(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \int N(x, y).dy \right) \right) dx$$

## **2.6. Factores integrantes.**

### **Definición.**

Se denomina **factor integrante**  $\mu(x, y)$  a cualquier función tal que multiplicando por ella la e.d.o. de la forma  $M(x, y).dx + N(x, y).dy = 0$  se obtiene otra e.d.o. diferencial exacta:

$$\mu(x, y).M(x, y).dx + \mu(x, y).N(x, y).dy = 0$$

En general la expresión de un factor integrante se obtiene resolviendo la ecuación en derivadas parciales:

$$M(x, y). \frac{\partial \mu}{\partial y}(x, y) - N(x, y). \frac{\partial \mu}{\partial x}(x, y) = \mu \left( \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) \right)$$

Casos particulares:

### **2.6.1. Caso en que el factor integrante depende de una expresión conocida $z(x, y)$ .**

En este caso el factor integrante se obtiene mediante:

$$\mu(z) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M \frac{\partial z}{\partial y} - N \frac{\partial z}{\partial x}} dz}$$

### **2.6.2. Caso en el que el factor integrante sólo depende de la variable independiente $x$ .**

En este caso el factor integrante se obtiene mediante:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)}{N(x, y)} dx}$$

### **2.6.3. Caso en el que el factor integrante sólo depende de la variable dependiente $y$ .**

En este caso el factor integrante se obtiene mediante:

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x, y)}{M(x, y)} dy}$$

## **2.7. E.D.O. lineales de primer orden.**

Son de la forma:

$$a_1(x).y'(x) + a_0(x).y(x) = b(x)$$

y se escribirán, dividiendo por  $a_1(x)$ , como:

$$y'(x) + p(x).y(x) = r(x)$$

Si  $b(x)$  es la función idénticamente nula la e.d.o. se denominará lineal de primer orden **homogénea**.

Si  $b(x)$  no es la función idénticamente nula la e.d.o. se denominará lineal de primer orden **completa**.

### 2.7.1. E.D.O. lineales de primer orden homogéneas.

Son de la forma:

$$y'(x) + p(x).y(x) = 0 \quad (1)$$

#### **Propiedad.**

El conjunto de soluciones de la e.d.o. (1) tiene estructura de espacio vectorial de dimensión 1.

#### NOTA:

La función  $y(x)=0$  es una solución de (1) que se denomina **solución trivial**.

Puesto que (1) es una e.d.o. de variables separadas su solución general será de la forma:

$$y(x) = K.e^{-\int p(x).dx}$$

### 2.7.2. E.D.O. lineales de primer orden completas.

Son de la forma:

$$y'(x) + p(x).y(x) = r(x) \quad (2)$$

#### **Propiedad.**

Siendo  $y_I(x)$  una solución particular de (2), y siendo  $y_0(x)$  la solución general de la e.d.o. homogénea asociada ( $y'(x) + p(x).y(x) = 0$ ), la solución general de (2) es de la forma:  $y(x) = y_0(x) + y_I(x)$ .

Procedimiento general de resolución de una e.d.o. lineal completa de primer orden:

1º Encontrar una solución particular de la completa ( $y_I(x)$ ).

2º Obtener la solución general de la homogénea ( $y_0(x)$ ).

3º Construir la solución general:  $y(x) = y_0(x) + y_I(x)$ .

Si no se conoce la solución particular  $y_I(x)$  de la completa puede utilizarse alguno de los dos métodos siguientes:

#### a) Método de variación de constantes (o método de Lagrange).

Siendo la solución de la e.d.o. homogénea  $y_0(x) = K.e^{-\int p(x).dx}$ , se buscan soluciones de la completa de la forma:

$$y(x) = K(x).e^{-\int p(x).dx}$$

donde  $K(x)$  es una función dependiente de la variable independiente  $x$ . Para determinarla se resuelve la e.d.o. de primer orden:

$$K'(x).e^{-\int p(x).dx} = r(x) \Rightarrow K(x) = \int r(x).e^{\int p(x).dx}.dx + C$$

#### b) Método del factor integrante (conversión en una e.d.o. exacta).

**Propiedad.**

La función  $\mu(x) = e^{\int p(x).dx}$  es un factor integrante de la e.d.o.  $y'(x) + p(x).y(x) = r(x)$ .

Por tanto la e.d.o. completa se transforma en:

$$\mu(x).(p(x).y(x) - r(x)).dx + \mu(x).dy = 0$$

que es una e.d.o. diferencial exacta que se resuelve según lo indicado en el apartado 2.5.

**2.8. Ecuaciones reducibles a lineales de primer orden.****2.8.1. Ecuación de Bernoulli.**

Son e.d.o. de la forma:  $y'(x) + p(x).y(x) = r(x).(y(x))^m$ .

Si  $m=0$ , la e.d.o. es lineal completa de primer orden.

Si  $m=1$ , la e.d.o. se escribe como:  $y'(x) + (p(x) - r(x)).y(x) = 0$  que es lineal homogénea de primer grado.

Si  $m$  es distinto de 0 y distinto de 1, su resolución consiste en:

a) Multiplicarlas por  $(y(x))^{-m}$  obteniendo la e.d.o.:

$$(y(x))^{-m}.y'(x) + p(x).(y(x))^{1-m} = r(x)$$

b) Hacer el cambio de variable dependiente:  $u(x) = (y(x))^{1-m}$  obteniendo la e.d.o.:

$$\frac{1}{1-m}.u'(x) + p(x)u(x) = r(x) \quad (3)$$

que es una e.d.o. lineal de primer orden en la variable  $u(x)$ .

c) Resolver (3) según lo visto en 2.7., obteniendo la función  $u(x)$ .

d) Deshacer el cambio de variable.

**2.8.2. Ecuación de Riccati.**

Son de la forma:  $y'(x) = p(x).(y(x))^2 + q(x).y(x) + r(x)$ .

Si  $p(x)=0$ , la e.d.o. es lineal completa.

Si  $r(x)=0$  la e.d.o. es de tipo Bernoulli con  $m=2$ .

En otros casos el procedimiento de resolución consiste en:

a) Encontrar una solución particular  $y_1(x)$ .

b) Realizar el cambio de variable dado por:  $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{u(x)}$  con lo que la

e.d.o. se transforma en:  $u'(x) + (2.p(x).y_1(x) + q(x)).u(x) = -p(x)$  que es una e.d.o. lineal completa que se resolverá según lo visto en el apartado 2.7. obteniéndose la función  $u(x)$ .

c) Deshacer el cambio de variable realizado obteniendo como solución general:

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{u(x)}$$

**3. E.D.O. lineales de orden  $n$ .**

Una e.d.o. lineal de orden  $n$  es de la forma:

$$a_n(x).y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x).y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x).y'(x) + a_0(x).y(x) = b(x)$$

donde  $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$  y  $b(x)$  son funciones sólo dependientes de la variable independiente  $x$ .

- Si  $b(x) \equiv 0$  la e.d.o. se dice que es homogénea.
- Si  $b(x) \neq 0$  la e.d.o se dice que es completa.
- Si todos los coeficientes  $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$  son constantes la e.d.o. se dice que es de coeficientes constantes.
- Si  $a_n(x) \equiv 1$  (cosa que se puede lograr siempre dividiendo la e.d.o. por este coeficiente) se dice que la e.d.o. está normalizada.

**Teorema.**

Si  $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$  y  $b(x)$  son funciones continuas en  $[\alpha, \beta]$  entonces el problema de Cauchy:

“Hallar  $y(x)$  tal que:

$$a_n(x).y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x).y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x).y'(x) + a_0(x).y(x) = b(x) \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

y:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad x_0 \in [\alpha, \beta]$$

donde  $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$  son valores conocidos”

admite una única solución.

**3.1. E.D.O. lineales homogéneas de orden  $n$ .**

Son de la forma:

$$a_n(x).y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x).y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x).y'(x) + a_0(x).y(x) = 0 \quad (4)$$

**Teorema.**

El conjunto de funciones formado por todas las soluciones de la e.d.o. (4) tiene estructura de espacio vectorial de dimensión  $n$ .

**Definición.**

Se denomina **sistema fundamental** de soluciones de (4) a toda base del espacio vectorial de soluciones de (4).

Consecuencia:

Dadas  $n$  funciones  $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$  para comprobar si constituyen un sistema fundamental de soluciones de (4) deben seguirse los siguientes pasos:

1º) Comprobar que todas las funciones son soluciones particulares de (4).

2º) Verificar que son  $n$  funciones linealmente independientes, es decir que:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \dots & \mathbf{M} \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall x$$

El determinante anterior se denomina Wronskiano de las funciones  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  que es a su vez función de la variable independiente  $x$ .

Además, si se dispone de un sistema fundamental de soluciones  $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$  la solución general de (4) se construye como:

$$y(x) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot y_i(x)$$

donde  $c_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) son  $n$  constantes arbitrarias.

**Propiedad.**

Siendo  $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$   $n$  funciones linealmente independientes (Wronskiano  $\neq 0$ ), constituyen un sistema fundamental de soluciones de la e.d.o. lineal homogénea de orden  $n$  dada por:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) & y(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) & y'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0$$

**Propiedad.**

Siendo  $y_1(x)$  una solución particular de la e.d.o lineal homogénea de orden  $n$  dada por (4), el cambio de variable:  $y(x) = y_1(x) \cdot v(x)$  transforma la e.d.o. (4) en otra e.d.o. diferencial lineal homogénea de orden  $(n-1)$  en la variable  $w(x) = v'(x)$ .

Procedimiento general de resolución de (4):

- 1º Encontrar una solución particular de (4) ( $y_1(x)$ ).
- 2º Realizar el cambio de variable  $y(x) = y_1(x) \cdot v(x)$  y obtener la e.d.o. correspondiente en  $v(x)$ .
- 3º Realizar el cambio de variable  $w(x) = v'(x)$  obteniendo la e.d.o. lineal homogénea de orden  $(n-1)$  en  $w(x)$ .
- 4º Resolver la e.d.o. obtenida en la etapa anterior obteniendo  $w(x)$ .
- 5º Deshacer los cambios de variable realizados.

**3.1.1. E.D.O. lineales homogéneas de coeficientes constantes de orden  $n$ .**

**Definición.**

Dada la e.d.o. lineal homogénea de coeficientes constantes de orden  $n$ :

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0 \quad (5)$$

se denomina **polinomio característico** asociado a la e.d.o. (5) al polinomio:

$$p(m) = m^n + a_{n-1} \cdot m^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot m + a_0$$

**Propiedad.**

- Siendo  $m_i$  una raíz simple del polinomio característico asociado a la e.d.o. (5), la función  $y_i(x) = e^{m_i \cdot x}$  es una solución particular de (5).
- Siendo  $m_i$  una raíz de multiplicidad  $r$  del polinomio característico asociado a la e.d.o. (5), las funciones:  
 $y_{i,1}(x) = e^{m_i \cdot x}$      $y_{i,2}(x) = x \cdot e^{m_i \cdot x}$      $y_{i,3}(x) = x^2 \cdot e^{m_i \cdot x}$     ...     $y_{i,r}(x) = x^{(r-1)} \cdot e^{m_i \cdot x}$  son soluciones particulares linealmente independientes de la e.d.o. (5).

Consecuencia:

Conocidas las raíces del polinomio característico asociado a la e.d.o. (5) se pueden obtener  $n$  soluciones particulares de la e.d.o. (5). Además estas  $n$  soluciones particulares constituyen un sistema fundamental del espacio de soluciones de (5) por lo que la solución general se podrá expresar como una combinación lineal de ellas. Más concretamente pueden distinguirse los casos siguientes:

a) Las raíces de  $p(m)$  son todas reales y simples.

En este caso la solución general será de la forma:

$$y(x) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot e^{m_i \cdot x}$$

b) Algunas raíces de  $p(m)$  son reales múltiples y otras son reales simples.

En este caso, si  $m_j$  es una raíz de multiplicidad  $r$ , dicha raíz aporta a la expresión de la solución general los sumandos:

$$(c_{i,1} + c_{i,1} \cdot x + c_{i,2} \cdot x^2 + \dots + c_{i,r} \cdot x^{(r-1)}) e^{m_i \cdot x}$$

A las expresiones así obtenidas deben añadirse las correspondientes a las raíces simples. En resumen, suponiendo que  $s$  (con  $0 \leq s < n$ ) es el número de raíces simples (ordenadas como las primeras  $s$  raíces de  $p(m)$ ) y que el resto de las raíces  $m_j$

( $j=s+1, \dots, q$ ) son raíces de multiplicidad  $r_j$  (donde  $s + \sum_{j=s+1}^q r_j = n$ ) se tendrá como

expresión de la solución:

$$y(x) = \sum_{i=1}^s c_i \cdot e^{m_i \cdot x} + \sum_{j=s+1}^q \left( \sum_{k=1}^{r_j} c_{j,k} \cdot x^{(k-1)} \right) e^{m_j \cdot x}$$

c) El polinomio característico  $p(m)$  tiene algunas raíces complejas simples.

En este caso, si  $m_j$  es una raíz compleja simple, de la forma  $m_j = a_j + b_j \cdot i$ , (con  $i = \sqrt{-1}$ ), también será raíz de  $p(m)$   $m_k = a_k - b_k \cdot i$ . Por ello dos soluciones particulares de la ecuación serán:

$$g_j(x) = e^{(a_j + b_j \cdot i) \cdot x} = e^{a_j} \cdot (\cos(b_j) + i \cdot \text{sen}(b_j))$$

$$g_k(x) = e^{(a_j - b_j \cdot i) \cdot x} = e^{a_j} \cdot (\cos(b_j) - i \cdot \text{sen}(b_j))$$

Estas dos soluciones particulares tienen expresiones complejas. No obstante, partiendo de ellas pueden generarse dos soluciones particulares reales independientes. Para ello basta con denominar:

$$y_j(x) = \frac{1}{2} \cdot (g_j(x) + g_k(x)) = e^{a_j} \cdot \cos(b_j)$$

$$y_k(x) = \frac{i}{2} \cdot (-g_j(x) + g_k(x)) = e^{a_j} \cdot \text{sen}(b_j)$$

Con esta consideración se tiene que las dos raíces complejas (conjugada una de la otra) aportan a la expresión de la solución general los sumandos:

$$e^{a_j \cdot x} \cdot (K_j \cdot \cos(b \cdot x) + C_j \cdot \text{sen}(b \cdot x))$$

A ellos habrá que añadirles los correspondientes a las raíces reales (simples o múltiples) del polinomio característico  $p(m)$ .

d) El polinomio característico  $p(m)$  tiene algunas raíces complejas múltiples.

En este caso, si  $m_j$  es una raíz compleja de multiplicidad  $r$ , de la forma  $m_j = a_j + b_j \cdot i$ , (con  $i = \sqrt{-1}$ ), también será raíz de multiplicidad  $r$  de  $p(m)$   $m_k = a_k - b_k \cdot i$ . Por ello, según el teorema general,  $(2 \cdot r)$  soluciones particulares de la ecuación diferencial son las funciones:

$$g_{j,s}(x) = x^{(s-1)} \cdot e^{(a_j + b_j \cdot i) \cdot x} = x^{(s-1)} \cdot e^{a_j} \cdot (\cos(b_j) + i \cdot \text{sen}(b_j)) \quad s = 1, \dots, r$$

$$g_{k,s}(x) = x^{(s-1)} \cdot e^{(a_j - b_j \cdot i) \cdot x} = x^{(s-1)} \cdot e^{a_j} \cdot (\cos(b_j) - i \cdot \text{sen}(b_j)) \quad s = 1, \dots, r$$

Estas (2.r) soluciones particulares tienen expresiones complejas. No obstante, partiendo de ellas pueden generarse (2.r) soluciones particulares reales independientes. Para ello basta con denominar:

$$y_{j,s}(x) = \frac{1}{2} \cdot (g_{j,s}(x) + g_{k,s}(x)) = x^{(s-1)} \cdot e^{a_j} \cdot \cos(b_j) \quad (s=1, \dots, r)$$

$$y_{k,s}(x) = \frac{i}{2} \cdot (-g_{j,s}(x) + g_{k,s}(x)) = x^{(s-1)} \cdot e^{a_j} \cdot \operatorname{sen}(b_j) \quad (s=1, \dots, r)$$

Con esta consideración se tiene que las dos raíces complejas (conjugada una de la otra) aportan a la expresión de la solución general los sumandos:

$$e^{a_j \cdot x} \cdot \left[ (K_{j,1} + K_{j,2} \cdot x + \dots + K_{j,r} \cdot x^{(r-1)}) \cos(b \cdot x) + (C_{j,1} + C_{j,2} \cdot x + \dots + C_{j,r} \cdot x^{(r-1)}) \operatorname{sen}(b \cdot x) \right]$$

A ellos habrá que añadirles los correspondientes a las raíces reales (simples o múltiples) y a las raíces complejas simples del polinomio característico  $p(m)$ .

### **3.2. E.D.O. lineales completas de orden n.**

#### **Propiedad (principio de superposición).**

Siendo  $y_1(x)$  una solución de la e.d.o. lineal de orden  $n$ :

$$a_n(x) \cdot y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = b_1(x)$$

y siendo  $y_2(x)$  una solución de la e.d.o. lineal de orden  $n$ :

$$a_n(x) \cdot y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = b_2(x)$$

entonces la función  $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$  es una solución de la e.d.o. lineal de orden  $n$ :

$$a_n(x) \cdot y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = b_1(x) + b_2(x)$$

#### **Propiedad.**

Siendo  $y_0(x)$  la solución general de la e.d.o. lineal homogénea de orden  $n$ :

$$a_n(x) \cdot y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = 0$$

y siendo  $y_1(x)$  una solución particular de la e.d.o. lineal completa de orden  $n$ :

$$a_n(x) \cdot y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = b(x) \quad (6)$$

entonces la función  $y(x) = y_0(x) + y_1(x)$  es solución general de la e.d.o. lineal completa (6):

$$a_n(x) \cdot y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = b(x)$$

Procedimiento general de resolución de una e.d.o. lineal completa de orden  $n$ :

1º Resolver la e.d.o. homogénea asociada hallando su solución general  $y_0(x)$ .

2º Encontrar una solución particular  $y_1(x)$  de (6).

3º Formar la solución general de (6) como  $y(x) = y_0(x) + y_1(x)$ .

Para hallar una solución particular de (6) puede emplearse el siguiente método:

Método de variación de constantes (o método de Lagrange).

Siendo la solución general de la e.d.o. homogénea de la forma:

$$\sum_{i=0}^n c_i \cdot y_i(x)$$

se buscará una solución particular de (6) de la forma:

