

SOLUCION DEL PRIMER CONTROL 21 NOVIEMBRE 2008

1. Calcular, si existe, supremo, ínfimo, máximo y mínimo del conjunto:

$A \cap B$  siendo  $A = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| + |x-1| > 1\}$  y  $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x^3 \leq 0\}$

(3 puntos)

Solución:

	$(-\infty, 1)$	$X=1$	$(1, 2)$	$X=2$	$(2, \infty)$
$ x-1 $	$1-x$	0	$x-1$	1	$x-1$
$ x-2 $	$2-x$	1	$2-x$	0	$x-2$
$ x-1  +  x-2 $	$3-2x$ *	1	1	1	$2x-3$ **

\*  $3 - 2x > 1 \Leftrightarrow 2 - 2x > 0 \Leftrightarrow 2 > 2x \Leftrightarrow 1 > x$

\*\*  $2x - 3 > 1 \Leftrightarrow 2x > 4 \Leftrightarrow x > 2$

$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| + |x-1| > 1\} = (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$

$$x^2 - 3x^3 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(1-3x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \\ y \\ 1-3x < 0 \Leftrightarrow 1 < 3x \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x \end{cases} \\ x^2(1-3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ o \\ 1-3x = 0 \Leftrightarrow 1 = 3x \Leftrightarrow \frac{1}{3} = x \end{cases} \end{cases}$$

$B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x^3 \leq 0\} = \{0\} \cup \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$

$A \cap B = \{0\} \cup \left[\frac{1}{3}, 1\right) \cup (2, \infty)$

No hay máximo, no hay supremo

Mínimo = Ínfimo = 0

2. **Estudia si la función  $f : [0,1] \rightarrow [0,3]$  definida como  $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$  es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva. (3 puntos)**

*Solución:*

No es inyectiva ya que 0 y 1 tienen la misma imagen  $f(0) = \frac{1}{2}$  y  $f(1) = \frac{1}{2}$

No es sobreyectiva ya que no hay ningún número  $x$  del intervalo  $[0,1]$  que se transforme en 3

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 3 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ pero se tiene que}$$

$$1 < \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{2}} < 0 \\ \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} > 1 \end{cases} \text{ Ninguno de los dos valores posibles pertenece al dominio}$$

de la función. No hay original para  $y = 3$ . La función no es sobreyectiva

La función no es biyectiva ya que no es inyectiva (tampoco es sobreyectiva).

3. **Calcula los siguientes límites:**

a.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n}{n^2 + 1}\right)^{\sqrt{n}}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x^3 + 3x^2 - 4}$

c.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x^3 + 3x^2 - 4}$

d.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{\sqrt{x} - 1}$

(4 puntos)

*Solución:*

a.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n}{n^2 + 1}\right)^{\sqrt{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1}\right)^{\sqrt{n}}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n\sqrt{n}}{n^2 + 1}\right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n\sqrt{n}/n^2}{(n^2 + 1)/n^2}\right)} = e^0 = 1$

b.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x^3 + 3x^2 - 4} = \frac{2^3 + 6 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 + 8}{2^3 + 3 \cdot 2^2 - 4} = \frac{64}{16} = 4$

c.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x^3 + 3x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+2)^3}{(x+2)^2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+2)}{(x-1)} = -\infty$

d.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)^2(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)^2(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)^2(\sqrt{x}+1)}{1} = 18$$

4.

**Resuelve la ecuación**  $z^5 = -243i$

(1 punto)

*Solución:*

Se trata de hallar los números  $z$  tales que  $z = \sqrt[5]{-243i}$

$|243i| = 243$ , argumento de  $-243i = -\frac{\pi}{2}$ . Aplicando las fórmulas de De Moivre se

tiene:  $z_k = \sqrt[5]{243} \left( \cos \frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{5} \right)$  con  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ .

$$z_0 = 3 \left( \cos \frac{-\pi}{10} + i \operatorname{sen} \frac{-\pi}{10} \right),$$

$$z_1 = 3 \left( \cos \frac{3\pi}{10} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{10} \right),$$

$$z_2 = 3 \left( \cos \frac{7\pi}{10} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{10} \right),$$

$$z_3 = 3 \left( \cos \frac{11\pi}{10} + i \operatorname{sen} \frac{11\pi}{10} \right)$$

$$z_4 = 3 \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \right)$$

5. *Se considera la sucesión de números reales definida por*

$$a_1 = 1 \quad a_n = \frac{a_{n-1}(1 + a_{n-1})}{1 + 2a_{n-1}} \quad n > 1$$

a. *Demostrar que es convergente viendo que es monótona decreciente y acotada inferiormente.*

(3 puntos)

b. *Calcular el límite*

(1 punto)

*Solución:*

Veamos que es acotada inferiormente por inducción sobre  $n$ :

$a_1 = 1 > 0$  Si  $a_k > 0$  se tiene que  $a_{k+1} = \frac{a_k(1+a_k)}{1+2a_k} > 0$  pues todos los factores

que intervienen son positivos por ser  $a_k > 0$ .

Veamos que es monótona decreciente:

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= \frac{a_{n-1}(1+a_{n-1})}{1+2a_{n-1}} - a_{n-1} = \frac{a_{n-1}(1+a_{n-1}) - a_{n-1}(1+2a_{n-1})}{1+2a_{n-1}} = \\ &= \frac{a_{n-1} + a_{n-1}^2 - a_{n-1} - 2a_{n-1}^2}{1+2a_{n-1}} = \frac{-a_{n-1}^2}{1+2a_{n-1}} < 0 \Leftrightarrow a_n < a_{n-1} \end{aligned}$$

Al ser monótona decreciente y acotada inferiormente es convergente.

Cálculo del límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1}(1+a_{n-1})}{1+2a_{n-1}} \Leftrightarrow L = \frac{L(1+L)}{1+2L} \Leftrightarrow L(1+2L) = L(1+L) \Leftrightarrow L+2L^2 = L+L^2 \Leftrightarrow L = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L = 0$$

## INTEGRALES

Calcula:

$$1. \int x^2 \ln(x) dx$$

Solución:

$$\begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln(x) \\ dv = x^2 dx \end{array} \quad \begin{array}{l} du = \frac{dx}{x} \\ v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \end{array}$$

$$\int x^2 \ln(x) dx = \frac{x^3}{3} \ln(x) - \int \frac{x^3}{3} \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} \ln(x) - \int \frac{x^2 dx}{3} = \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$$

$$2. \int \frac{2x^2 - x + 3}{(x-2)^2(x+1)} dx$$

$$\text{Solución: } \frac{2x^2 - x + 3}{(x-2)^2(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$2x^2 - x + 3 = A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} 9 = 3C \\ 6 = 9A \\ 3 = 4A - 2B + C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = C \\ \frac{2}{3} = A \\ \frac{4}{3} = B \end{cases}$$

$$\int \frac{2x^2 - x + 3}{(x-2)^2(x+1)} dx =$$

$$\frac{2}{3} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{4}{3} \int \frac{dx}{x-2} + 3 \int \frac{dx}{(x-2)^2} = \frac{2}{3} \ln(x+1) + \frac{4}{3} \ln(x-2) + 3 \left( -\frac{1}{x-2} \right) + K$$

$$3. \int (\cos(x))^3 dx$$

Solución:

$$\int (\cos(x))^3 dx = \int \cos(x)(\cos(x))^2 dx = \int \cos(x)(1 - (\sin(x))^2) dx = \int \cos(x) dx - \int (\sin(x))^2 \cos(x) dx$$

$$= \text{sen}(x) - \frac{(\text{sen}(x))^3}{3} + K$$

$$4. \int \frac{5dx}{x^2 + 4x + 12}$$

$$\int \frac{5dx}{x^2 + 4x + 12} = 5 \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 8} = 5 \int \frac{\frac{1}{(\sqrt{8})^2} dx}{\frac{(x+2)^2}{(\sqrt{8})^2} + 1} = \frac{5}{(\sqrt{8})} \int \frac{\frac{1}{(\sqrt{8})} dx}{\left(\frac{x+2}{\sqrt{8}}\right)^2 + 1} = \frac{5}{(\sqrt{8})} \arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{8}}\right) + K$$

Deriva:

$$5. f(x) = (x^4 + 1)e^{(x^2 - 3x + 2)}(\text{sen}(x))^4$$

Solución: Utilizamos derivación logarítmica

$$\ln(f(x)) = \ln\left((x^4 + 1)e^{(x^2 - 3x + 2)}(\text{sen}(x))^4\right) = \ln(x^4 + 1) + \ln e^{(x^2 - 3x + 2)} + \ln(\text{sen}(x))^4 =$$

$$\ln(x^4 + 1) + (x^2 - 3x + 2) + 4 \ln(\text{sen}(x))$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{4x^3}{(x^4 + 1)} + 2x - 3 + \frac{4 \cos(x)}{\text{sen}(x)}$$

$$f'(x) = \left( \frac{4x^3}{(x^4 + 1)} + 2x - 3 + \frac{4 \cos(x)}{\text{sen}(x)} \right) f(x)$$

$$f'(x) = \left( \frac{4x^3}{(x^4 + 1)} + 2x - 3 + \frac{4 \cos(x)}{\text{sen}(x)} \right) (x^4 + 1)e^{(x^2 - 3x + 2)}(\text{sen}(x))^4$$

$$6. f(x) = \cos\left(\ln\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)$$

$$\text{Solución: } f'(x) = -\text{sen}\left(\ln\left(\frac{1}{x+1}\right)\right) \cdot \frac{1}{\frac{(x+1)^2}{1}} = +\text{sen}\left(\ln\left(\frac{1}{x+1}\right)\right) \frac{1}{x+1}$$