ITIS – Bases de Matemáticas – Febrero de 2008

1) **Estudia la convergencia de las siguientes integrales:**

a) $\int_0^1 e^{8x}\cos\left(e^{4x}\right)dx$

<u>Solución</u>:

Tanto la función exponencial, como el coseno, como kx con k = 4 0 k = 8 son funciones continuas en toda la recta real. La función a integrar, por ser producto de composiciones de funciones continuas, es continua en toda la recta real y, en el intervalo de integración, acotada por lo que no se trata de una integral impropia.

Calculamos la integral con el cambio de variable $t = e^{4x}$ $dt = 4e^{4x}dx$ $dx = \dfrac{dt}{4t}$ e integrando por partes

$$\int_0^1 e^{8x}\cos\left(e^{4x}\right)dx = \int_1^{e^4} t^2\cos(t)\frac{dt}{4t} = \frac{1}{4}\int_1^{e^4} t\cos(t)\,dt = \frac{1}{4}\left(tsen(t)\Big|_1^{e^4} - \int_1^{e^4} sen(t)\,dt\right) = \frac{1}{4}\left(tsen(t)\Big|_1^{e^4} + \cos(t)\Big|_1^{e^4}\right) =$$

$$\frac{1}{4}\left[\left(e^4 sen\left(e^4\right) - sen(1)\right) + \left(\cos\left(e^4\right) - \cos(1)\right)\right]$$

b) $\int_e^\infty \frac{1}{x[\ln(x)]^2}dx$

<u>Solución:</u>

Se trata, en principio, de una integral impropia de primera especie por tratarse de un intervalo de integración no acotado. La función a integrar es continua por ser producto de composiciones de funciones continuas, acotadas en cualquier intervalo cerrado contenido en (e,∞) y, por tanto, al no anularse el denominador en dicho intervalo la función es acotada en el intervalo de integración.

$$\int_e^\infty \frac{1}{x[\ln(x)]^2}dx = \lim_{c\to\infty}\int_e^c \frac{1}{x[\ln(x)]^2}dx = \lim_{c\to\infty}\int_1^{\ln(c)} \frac{1}{e^t[t]^2}e^t\,dt = \lim_{c\to\infty}\int_1^{\ln(c)} \frac{1}{t^2}dt = \lim_{c\to\infty}\left(-\frac{1}{t}\Big|_1^{\ln(c)}\right) = \lim_{c\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln(c)}+1\right) = 1$$

2)

a) **Estudiar la continuidad de la función**

$$f(x) = \left(x^3+1\right)\ln\left(\frac{1}{2x^2+1}\right)$$

<u>Solución:</u>

La función es producto de las funciones $h(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = \ln\left(\frac{1}{2x^2+1}\right)$.

La función $h(x) = x^3 + 1$ es una función polinómica y, por tanto, continua.

La función $g(x) = \ln\left(\frac{1}{2x^2+1}\right)$ es la composición de la función logaritmo neperiano con una función racional.

La función racional $k(x) = \frac{1}{2x^2+1}$ es continua en todo el conjunto de los números reales ya que es el cociente de dos funciones polinómicas (continuas) y $2x^2 + 1 = 0$ no tiene solución real.

Por otra parte, $\frac{1}{2x^2+1} > 0$ para cualquier número real y por lo tanto la función g $g(x) = \ln\left(\frac{1}{2x^2+1}\right)$ tiene por dominio toda la recta real donde es continua por ser composición de dos funciones continuas.

Todo esto indica que $f(x) = (x^3+1)\ln\left(\frac{1}{2x^2+1}\right)$ es continua en todo el conjunto de los números reales por ser el producto de funciones continuas en el mismo conjunto.

b) **Determina, si es posible, el valor del parámetro *a* para que la función *f* sea derivable en todo su dominio de definición:**

$$f(x) = \begin{cases} x\ln x & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ a(1-e^{1-x}) & \text{si} \quad 1 < \text{x} \end{cases}$$

<u>Solución:</u>

El dominio de definición de la función es $(0,\infty)$.

Si la función no es continua en un punto del dominio no será derivable en dicho punto. Estudiamos pues la continuidad:

En $(0,1)$ la función es producto de funciones continuas: es continua

En $(1,\infty)$ la función es el producto de una constante por la diferencia de funciones que son continuas o composición de funciones continuas: es continua.

Para x = 1 calculamos los límites:

$$\lim_{x\to1-} x\ln x = \ln 1 = 0 = f(1) \text{ y}$$

$$\lim_{x\to1+} a\left(1-e^{1-x}\right) = a\left(1-e^{1-1}\right) = a\left(1-e^{0}\right) = a(1-1) = 0$$

Como ambos límites coinciden, independientemente del valor de ***a***, la <u>función es continua en todo su dominio de definición.</u>

Estudiamos la derivabilidad:

En $(0,1)$ la función es producto de funciones derivables: es derivable:

$f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1$ es una función continua

En $(1,\infty)$ la función es el producto de una constante por la diferencia de funciones que son derivables o composición de funciones derivables: es derivable:

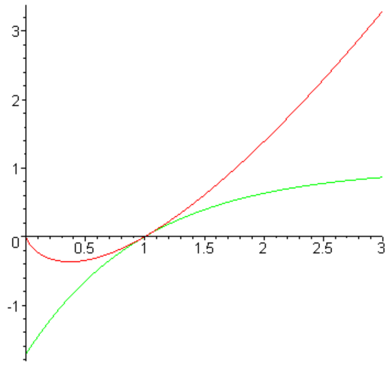
$f'(x) = a\left(0 - (-1)e^{1-x}\right) = ae^{1-x}$, es una función continua

Para x = 1 calculamos los límites:

$$\lim_{x\to 1-}(\ln x + 1) = (\ln 1) + 1 = 1 \quad \text{y}$$

$$\lim_{x\to 1+} a\left(e^{1-x}\right) = a\left(e^{1-1}\right) = a\left(e^{0}\right) = a(1) = a$$

Para que la función f sea derivable en x =1 debe cumplirse que ambos límites coincidan. Por tanto, a =1 es la condición que debe cumplirse.



***3)* Calcular los siguientes límites:**

a) $\lim_{x\to 0}\frac{tgx - x}{x - senx}$

<u>Solución:</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx - x}{x - senx} = \frac{0-0}{0-0} = \frac{0}{0}$$

Se trata de una indeterminación en la que podemos aplicar l´Hôpital.

Derivamos numerador y denominador y obtenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx - x}{x - senx} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

Operando adecuadamente

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1-\cos x)\cos^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+\cos x)}{\cos^2 x} = \frac{1+1}{1} = 2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx - x}{x - senx} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = 2$$

b) $\lim\limits_{x\to 0+} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to 0+} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=0\left(e^{\infty}-1\right)=0\infty$$

Se trata de una indeterminación que puede resolverse por l´Hôpital.

$$\lim_{x\to 0+} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim_{x\to 0+}\frac{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(e^{\frac{1}{x}}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to 0+}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)=\infty$$

4) **Determina el dominio, las asíntotas, los extremos relativos, los intervalos de monotonía, concavidad y convexidad de la función f(x) = |x^3-9x|**

Solución:

a) La función es la composición de las funciones g(x) = | x | y h(x) = $x^3 - 9x$.

El dominio de h es toda la recta real, su imagen, o recorrido, es también toda la recta real y coincide con el dominio de la función g. La función dada tiene por dominio toda la recta real.

b)

i) La función no presenta asíntotas verticales.

ii) La función no presenta asíntotas horizontales ya que

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left|x^3-9x\right|=\lim_{x\to +\infty}\left|x^3\left(1-\frac{9}{x^2}\right)\right|=+\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\left|x^3-9x\right|=\lim_{x\to -\infty}\left|x^3\left(1-\frac{9}{x^2}\right)\right|=+\infty$$

iii) La función no presenta asíntotas oblicuas ya que

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left|x^3-9x\right|}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left|x^3\left(1-\frac{9}{x^2}\right)\right|}{x}=\lim_{x\to +\infty}\left|x^2\left(1-\frac{9}{x^2}\right)\right|=+\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{\left|x^3-9x\right|}{x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{\left|x^3\left(1-\frac{9}{x^2}\right)\right|}{x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{|x|}{x}\left|x^2\left(1-\frac{9}{x^2}\right)\right|=-\infty$$

c) La función h es derivable en todo su dominio pero la función g solo es derivable en aquellos puntos en que es distinta de 0. La función f será derivable en toda la recta real excepto en las soluciones de la ecuación h(x) = 0 que son 0,-3 y 3.

$$f(x)=\begin{cases}9x-x^3 & \text{si } x<-3\\ x^3-9x & \text{si } -3\le x<0\\ 9x-x^3 & \text{si } 0\le x<3\\ x^3-9x & \text{si } 3\le x\end{cases}\qquad f'(x)=\begin{cases}9-3x^2 & \text{si } x<-3\\ 3x^2-9 & \text{si } -3<x<0\\ 9-3x^2 & \text{si } 0<x<3\\ 3x^2-9 & \text{si } 3<x\end{cases}$$

Para hallar los extremos relativos de la función f estudiamos los puntos críticos:

$f(0)=f(-3)=f(3)=0\ge f(x)\quad \forall x\in R-\{0,3,-3\}$

En 0, 3 y -3 la función alcanza un mínimo.

$9-3x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}\qquad f\left(-\sqrt{3}\right)=\left(-\sqrt{3}\right)^3-9\left(-\sqrt{3}\right)=6\sqrt{3}$

$f\left(\sqrt{3}\right)=9\left(\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{3}\right)^3=6\sqrt{3}$

$$f''(x)=\begin{cases}-6x & \text{si } x<-3\\ 6x & \text{si } -3<x<0\\ -6x & \text{si } 0<x<3\\ 6x & \text{si } 3<x\end{cases}$$

$f''\left(-\sqrt{3}\right)=6\left(-\sqrt{3}\right)<0\qquad f''\left(\sqrt{3}\right)=-6\left(\sqrt{3}\right)<0$

En -3 y 3 se alcanza un máximo.

d) Para estudiar el crecimiento de la función nos basamos en la primera derivada de la misma:

$$f'(x)=\begin{cases}9-3x^2<0 & \text{si } x<-3\\ 3\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)>0 & \text{si } -3<x<-\sqrt{3}\\ 3\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)<0 & \text{si } -\sqrt{3}<x<0\\ 3\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)>0 & \text{si } 0<x<\sqrt{3}\\ 3\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)<0 & \text{si } \sqrt{3}<x<3\\ 3x^2-9>0 & \text{si } 3<x\end{cases}$$

La función es creciente en $\left(-3,-\sqrt{3}\right)\mathrm{Y}\left(0,\sqrt{3}\right)\mathrm{Y}\left(3,\infty\right)$

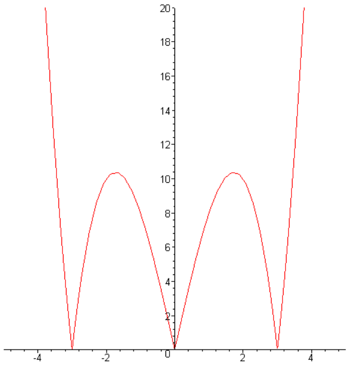
La función es decreciente en $\left(-\infty,-3\right)\mathrm{Y}\left(-\sqrt{3},0\right)\mathrm{Y}\left(\sqrt{3},3\right)$

e) Para estudiar la concavidad y convexidad consideramos la segunda derivada

$$f''(x)=\begin{cases}-6x>0 & \text{si } x<-3\\ 6x<0 & \text{si } -3<x<0\\ -6x<0 & \text{si } 0<x<3\\ 6x>0 & \text{si } 3<x\end{cases}$$

La función es convexa en $\left(-\infty,-3\right)\mathrm{Y}\left(3,\infty\right)$

La función es cóncava en $\left(-3,0\right)\mathrm{Y}\left(0,3\right)$



5)

a) **Sea la sucesión $\{a_n\}_{n\in N}$ definida por**

$$a_1 = \frac{1}{4} \qquad a_{n+1} = a_n^2 \quad \forall n > 1$$

Demostrar que es acotada, decreciente y convergente.

Solución:

i) Comprobamos que $\forall n \in N \quad 0 < a_n \leq \frac{1}{4}$ esto es, que la sucesión está acotada inferior y superiormente, lo hacemos por inducción sobre n:

Para n =1 $0 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow 0 < a_1 \leq \frac{1}{4}$

Suponemos que está probado para n = k $\quad 0 < a_k \leq \frac{1}{4}$

Lo probamos para n =k+1

$$a_{k+1} = a_k^2 > 0 \ \text{ y } \ 0 < a_k \leq \frac{1}{4} \Rightarrow a_k^2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow a_{k+1} \leq \frac{1}{16} < \frac{1}{4}$$

por tanto $\quad 0 < a_{k+1} \leq \frac{1}{4}$. La sucesión es acotada.

ii) Para ver que es monótona decreciente evaluamos la diferencia entre dos términos consecutivos

$$\forall n \in N \qquad a_{n+1} - a_n = a_n^2 - a_n = a_n(a_n - 1) < 0 \ \text{ ya que } \ \forall n \in N \quad 0 < a_n \leq \frac{1}{4} < 1$$

$$\forall n \in N \qquad a_{n+1} - a_n < 0 \Leftrightarrow a_{n+1} < a_n \ \text{ La sucesión es decreciente.}$$

iii) Una sucesión monótona decreciente y acotada es convergente (teorema de la convergencia monótona).

b) **Considerar el conjunto** $X := \{x \in R \mid x^2 < 3\}$**, con el orden natural en R. ¿Está acotado? ¿Tiene máximo y mínimo? Si es el caso, ¿cuáles son? ¿Existen supremo e ínfimo de X? Si es el caso, ¿cuáles son?**

<u>Solución:</u>

$x^2 < 3 \Leftrightarrow x^2 - 3 < 0 \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right) < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$

$X := \{x \in R \mid x^2 < 3\} = \{x \in R \mid -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}\} = \left(-\sqrt{3},\ \sqrt{3}\right) \subset R$

El conjunto está acotado inferiormente por $-\sqrt{3}$ y superiormente por $\sqrt{3}$.

No tiene ni máximo ni mínimo.

El supremo es $\sqrt{3}$ y el ínfimo $-\sqrt{3}$