Bases de Matemáticas
(Informática de Sistemas, de Gestión y LADE)
Soluciones del examen final
Fecha: 5 de febrero del 2007 **Tiempo: 3 horas**

El examen está compuesto por 8 problemas y se valorará sobre 10 puntos. La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.
Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.
No está permitido el uso de calculadoras.

Problema 1 (1 punto) Halla el conjunto de los números reales x que verifican la desigualdad

$$|x+1| < |x-1|.$$

Solución: Como $|x+1|$ es $x+1$ si $x \geq -1$, y $-x-1$ si $x < -1$, y como $|x-1|$ es $x-1$ si $x \geq 1$, y $-x+1$ si $x < 1$, distinguiremos los casos $-\infty < x < -1$, $-1 \leq x < 1$ y $1 \leq x < \infty$. En el primer caso $|x+1| < |x-1|$ se convierte en $-x-1 < 1-x$ y las soluciones son $x \in (-\infty, -1)$. En el segundo caso $|x+1| < |x-1|$ se convierte en $x+1 < 1-x$ y las soluciones son $x \in [-1, 0)$. En el tercer caso $|x+1| < |x-1|$ se convierte en $x+1 < x-1$ y no hay solución. Luego, en general las soluciones son $x \in (-\infty, 0)$.

Problema 2 (1 punto) Halla todos los números complejos z que verifican

$$z^5 = 5^5.$$

Solución: Como 5^5 tiene módulo 5^5 y argumento 0, sus raíces quintas, que son las soluciones del problema, son:

$$z_k = 5\left(cos(\frac{2k\pi}{5}) + i\, sen(\frac{2k\pi}{5})\right)$$

para $k = 0, 1, 2, 3, 4$. (En particular, $z_0 = 5$).

Problema 3 (1,5 puntos) Estudia la convergencia de la sucesión

$$a_n = \frac{2^{n!}}{222^n}\,.$$

Solución: Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^{n!})^n}{222} = \infty$$

tenemos que la sucesión diverge.

Problema 4 (1,5 puntos) En un entorno del punto $x_0 = 0$, halla el polinomio de Taylor de orden 4 de la función $f(x) = tan(x)$.

Solución:

$$\begin{array}{ll} f(x) = tan(x), & f(0) = 0, \\ f'(x) = cos^{-2}(x), & f'(0) = 1, \\ f''(x) = 2\,cos^{-3}(x)\,sen(x), & f''(0) = 0, \\ f^{(3)}(x) = 6\,cos^{-4}(x)\,sen^2(x) + 2\,cos^{-2}(x), & f^{(3)}(0) = 2, \\ f^{(4)}(x) = 24\,cos^{-5}(x)\,sen^3(x) + 16\,cos^{-3}(x)\,sen(x), & f^{(4)}(0) = 0. \end{array}$$

El polinomio de Taylor de orden 4 es

$$P_4(x;0) = x + \frac{2}{3!}x^3 = x + \frac{1}{3}x^3.$$

Problema 5 (1 punto) Demuestra que la ecuación $xe^x - 1 = 0$ tiene una única solución real a y que $a \in (0,1)$. Demostrar además que $xe^x - 1 \geq 0$ si $x \geq a$ y que $xe^x - 1 \leq 0$ si $x \leq a$.

Solución: Como la exponencial es siempre positiva, si a es solución de la ecuación entonces $a > 0$. Como $f(x) = xe^x - 1$ es una función continua, $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = e - 1 > 0$ entonces, por el teorema de la raíz, la ecuación tiene una solución a en el intervalo $(0,1)$. Como $f'(x) = e^x + xe^x > 0$ si $x \geq 0$ entonces la función es estrictamente creciente en $(0,\infty)$, lo que demuestra que la raíz es única. Como f es continua en el conjunto de los números reales y tiene una única raíz entonces el signo de la función sólo puede cambiar en a, donde vale $f(a) = 0$, y se tiene la parte segunda.

Problema 6 (2 puntos) Sea $f(x)$ la función definida como

$$f(x) = \frac{|x+1|}{e^x + 1}.$$

(6.1) (0,5 puntos) Estudia su dominio, su continuidad y su derivabilidad,

(6.2) (0,75 puntos) estudia su monotonía (necesitarás usar los resultados del problema 5),

(6.3) (0,75 puntos) representa gráficamente la función (información adicional: donde f'' existe se tiene $f''(x) < 0$ si $x < 1{,}7959$, $f''(x) > 0$ si $x > 1{,}7959$).

Solución: (6.1) Como el denominador no se anula nunca, la función está definida para cada número real de modo que su dominio es el conjunto de los números reales. Como es un cociente de funciones continuas, es una función continua en su dominio. Para estudiar la derivabilidad definimos la función como una función a trozos: Si $x \geq -1$ la función se define como $f(x) = \frac{x+1}{e^x+1}$ y si $x \leq -1$ se define como $f(x) = \frac{-x-1}{e^x+1}$ Por ser una función definida a trozos mediante funciones de clase C^1, f es derivable cuando $x \neq -1$. Para ver si es derivable en $x = -1$ basta ver si la derivada por la derecha y por la izquierda coinciden. Derivamos:

$$(\frac{x+1}{e^x+1})' = \frac{1 - xe^x}{(e^x+1)^2}$$

y obtenemos que

$$\lim_{x \to (-1)^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \frac{1 + e^{-1}}{(e^{-1}+1)^2}.$$

De igual manera:

$$(\frac{-x-1}{e^x+1})' = \frac{-1 + xe^x}{(e^x+1)^2}$$

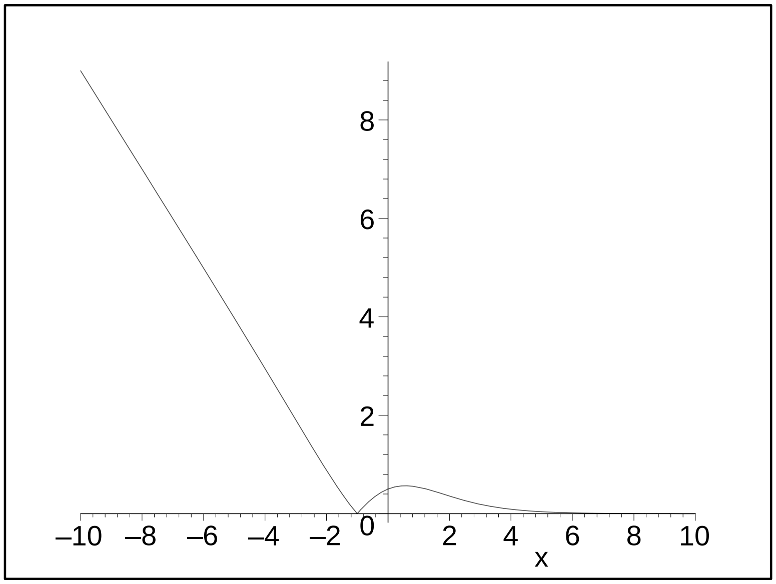

Figura 1. Gráfica del Problema 6

y obtenemos que
$$\lim_{x\to(-1)^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \frac{-1-e^{-1}}{(e^{-1}+1)^2},$$
de modo que no es derivable en $x=-1$.

(6.2) Por (6.1) la derivada es $f'(x) = \frac{1-xe^x}{(e^x+1)^2}$ cuando $x>-1$ y $f'(x) = \frac{-1+xe^x}{(e^x+1)^2}$ cuando $x<-1$. El signo de este modo lo establece el numerador. Usando el resultado del problema 5: f es decreciente en $(-\infty,-1)$, creciente en $(-1,a)$ y decreciente en $(a,+\infty)$. Por tanto a es un máximo relativo y $x=-1$ es un mínimo relativo.

(6.3) No hay asíntotas verticales pues es continua en el conjunto de los números reales. Para ver las asíntontas horizontales observamos que:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
usando la regla de L'Hôpital, de modo que $y=0$ es una asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$. Y observamos también
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1; \lim_{x\to-\infty} (f(x)+x) = -1$$
de modo que por cuando x tiende a $-\infty$ no hay una asíntota horizontal pero $y=-x-1$ es una asíntota oblicua. Esta información es suficiente para determinar la gráfica.

Problema 7 (1 punto) Estudia la existencia del siguiente límite:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_2^{x^2+1} e^t\, t^{40}\, dt}{x^2}.$$

Solución: La función
$$F(x) = \int_2^{x^2+1} e^t\, t^{40}\, dt$$
es derivable por el teorema fundamental del cálculo integral por ser $e^t\, t^{40}$ continua y x^2+1 derivable en $\mathbb{R}$. Además, siendo $e^t\, t^{40}$ creciente en $(1, \infty)$,
$$\lim_{x\to\infty} \int_2^{x^2+1} e^t\, t^{40}\, dt \geq \lim_{x\to\infty} \int_2^{x^2+1} e\, dt = \lim_{x\to\infty} e\,(x^2-1) = \infty.$$
Aplicando el teorema de L' Hôpital, se obtiene que
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_2^{x^2+1} e^t\, t^{40}\, dt}{x^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2+1}\,(x^2+1)^{40}\, 2x}{2x} = \infty$$
y el límite dado no existe.

Problema 8 (1 punto) Usando un cambio de variable e integración por partes, calcula la siguiente integral indefinida:
$$\int x\,\sqrt{x^2+1}\,\ln(\sqrt{x^2+1})\, dx.$$

Solución: Sea $y = ln(\sqrt{x^2+1})$. Con este cambio de variable, se obtiene:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{x^2+1}, \quad e^y = \sqrt{x^2+1}, \quad x\,dx = (x^2+1)\,dy = e^{2y}\,dy.$$
Entonces,
$$\int x\,\sqrt{x^2+1}\,\ln(\sqrt{x^2+1})\,dx = \int y\,e^{3y}\,dy \overset{\text{por partes}}{=} \frac{y\,e^{3y}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3y}\,dy =$$
$$= \frac{y\,e^{3y}}{3} - \frac{e^{3y}}{9} + c = \frac{\ln(\sqrt{x^2+1})\,e^{3\ln(\sqrt{x^2+1})}}{3} - \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{9} + c =$$
$$= \frac{3\ln(\sqrt{x^2+1}) - 1}{9}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + c \qquad (c \in \mathbb{R}).$$