

BASES DE MATEMÁTICAS

HOJA 5

Ejercicio 1:

Demostrar que

$$\left| \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x} dx \right| \leq \ln 2.$$

Ejercicio 2:

Demostrar que dados $a, b > 0$, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b x^3 \ln(1+x^2) dx = \frac{1}{4}(b^4 - a^4) \ln(1+c^2).$$

Ejercicio 3:

Estudiar la derivabilidad de la función $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, siendo

$$f(t) = \begin{cases} |t| & \text{si } t < 1, \\ t^2 & \text{si } 1 \leq t < 2, \\ \ln(t), & \text{si } t \geq 2. \end{cases}$$

Ejercicio 4:

Si la función derivable y biyectiva $f(x)$ viene definida de forma implícita mediante la ecuación:

$$x = \int_1^{f(x)} \frac{e^t}{t} dt,$$

calcula $f'(x)$ en términos de $f(x)$ y $(f^{-1})'(x)$.

Ejercicio 5:

Calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $F(x) = \int_0^{x^2} \cos(t^2) dt,$

b) $G(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{2-t^4} dt,$

c) $H(x) = \int_0^{x^2} x^3 \cos(t^2) dt,$

$$d) H(x) = \int_{x^2}^x \sqrt{1+t^2} dt.$$

Ejercicio 6:

Calcular el área de la figura limitada por: la rama derecha de la parábola $y = x^2$, la rama izquierda de la parábola $y = (x - 2)^2$ y la recta $y = 4$.

Ejercicio 7:

Hallar las siguientes integrales indefinidas

$$a) \int e^{2x} \sin(x) dx.$$

$$b) \int x^4 \ln(x^2) dx.$$

$$c) \int \frac{x^2}{4+x^6} dx.$$

Ejercicio 8:

Sea f una función definida por $f(x) = \frac{-3x^3 - x}{(x^2 + 1)^2}$.

$$a) \text{ Descomponer } f \text{ en la forma } \frac{Ax + B}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}.$$

$$b) \text{ Calcular } \int f(x) dx.$$

Ejercicio 9:

$$a) \text{ Demostrar que } \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}.$$

(Sugerencia: $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ y $\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$).

$$b) \text{ Sea } u = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \text{ demostrar que}$$

$$\cos(x) = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \quad \sin(x) = \frac{2u}{1 + u^2} \quad \text{y} \quad dx = \frac{2}{1 + u^2} du.$$

$$c) \text{ Usando el cambio de variable } u = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \text{ calcular}$$

$$\int \frac{1}{1 + \sin(x) - \cos(x)} dx \quad \text{y} \quad \int \frac{1}{-4 \sin(x) + 3 \cos(x)} dx.$$

Ejercicio 10: Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx,$$

$$b) \int_0^3 \frac{1}{x^3} dx,$$

$$c) \int_{-1}^3 \frac{1}{x^3} dx,$$

d) $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}} dx,$

e) $\int_0^{\infty} x e^{-2x} dx,$

f) $\int_0^2 \frac{1}{x-2} dx.$

Ejercicio 11: La función $\Gamma(n)$ se define como

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Hallar $\Gamma(1)$, $\Gamma(2)$ y $\Gamma(3)$.
- Integrando por partes, demostrar que $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.
- Expresar $\Gamma(n)$ en términos de factoriales.