BASES DE MATEMÁTICAS

PROBLEMAS RESUELTOS

Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas y de Gestión

ESCET

Alessandra Gallinari

2003

Introducción

El contenido de esta publicación es una colección de problemas de la asignatura de Bases de Matemáticas para las titulaciones de Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas y de Gestión de la Escuela Superior de Ciencias Experimentales y Tecnología (ESCET). Los problemas se propusieron a los alumnos en forma de hojas de ejercicios y exámenes en los años académicos 1999-2000, 2000-2001 y 2001-2002.

En la segunda parte del manual se presentan soluciones completas. Es indispensable que el alumno trabaje sobre cada cuestión e intente llegar a sus propias conclusiones antes de leer las soluciones incluidas.

Los problemas, en su mayoría, no son originales. Se utilizaron ejercicios (unas veces sin modificarlos, otras proponiendo variaciones de ellos) existentes en la bibliografía incluyda al final de esta publicación.

Agradecimientos

Quiero agradecer al profesor David Rupérez su participación en la elaboración del material relativo a las hojas de problemas y sus soluciones durante el año académico 1999-2000.

Muchas gracias al profesor Roberto Muñoz por su participación en la elaboración del material relativo a los exámenes, las hojas de problemas y sus soluciones durante el año académico 2000-2001.

Muchas gracias a los profesores Ariel Sánchez y Jose Ignacio Tello del Castillo por su participación en la elaboración del material relativo a las hojas de problemas y sus soluciones durante el año académico 2001-2002. Gracias a los profesores Alejandro García del Amo y Ariel Sánchez por su participación en la elaboración de los exámenes finales durante el año académico 2001-2002.

Gracias también a los alumnos que han señalado erratas y errores en versiones previas.

Índice General

Parte I

Problemas

Capítulo 1

Hojas de problemas 1999-2000

BASES DE MATEMÁTICAS

HOJA 1

1999-2000

---

1) Demostrar la siguiente

Proposición Sea $f : A \longrightarrow B$ una función inye ctiva y sean C y D dos subconjuntos no vacíos de A. Entonces $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$. Encontrar un ejemplo de una función f no inyectiva y dos conjuntos C y D tales que $f(C \cap D) \neq f(C) \cap f(D)$.

2) Demostrar que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces
a) $-(a+b) = (-a) + (-b)$ b) $(-a)(-b) = ab$
c) $\frac{1}{(-a)} = -(\frac{1}{a})$ si $a \neq 0$ d) $-(\frac{a}{b}) = \frac{(-a)}{b}$ si $b \neq 0$

3) Si $c > 1$, demostrar que $c^n \geq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Utilizar la desigualdad de Bernoulli: $(1+x)^n \geq 1 = nx$ (si $x + 1 > 0$) con $c = 1 + x$.

4)

a) Sean A y B dos subconjuntos no vacíos acotados de $\mathbb{R}$ y sea $A + B = \{a + b : a \in A \text{ y } b \in B\}$. Demostrar que $sup(A + B) = sup(A) + sup(B)$ y que $inf(A + B) = inf(A) + inf(B)$.

b) Sean $u > 0$ y x, y números reales tales que $x < y$, demostrar que existe un número racional r tal que $x < ru < y$. Se sigue que el conjunto $\{ru : u \in \mathbb{Q}\}$ es denso en $\mathbb{R}$.

5)

a) Demostrar que si S es finito y s^* es un elemento que no está en S, entonces $S \cup \{s^*\}$ es finito.

b) Dar un ejemplo de una colección numerable de conjuntos finitos cuya unión no sea finita.

BASES DE MATEMÁTICAS

HOJA 2

1999-2000

---

1) i) Usar la definición de límite de una sucesión para establecer los siguientes límites:
a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n+5} = \frac{3}{2}$
b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{2n^2+3} = \frac{1}{2}$

ii) Demostrar que:
a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = 0$
b) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1} = 0$

2) i) Calcular los límites de las siguientes sucesiones:
a) $\lim_{n\to\infty} (2+\frac{1}{n})^2$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$
c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$ d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{n}}$

ii) Sea $y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Demostrar que las sucesiones $\{y_n\}$ y $\{\sqrt{n} y_n\}$ convergen.

3) i) Sea A un subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ que tiene una cota superior y sea $u = sup(A)$. Demostrar que existe una sucesión creciente $\{a_n\}$, con $a_n \in A \, \forall n \in \mathbb{N}$, tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = u$.
ii) Establecer la convergencia o divergencia de la sucesión $\{y_n\}$, donde $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

4) Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ sucesiones dadas y sea $\{z_n\}$ la sucesión definida por: $\{z_{2n-1}\} = \{x_n\}$ y $\{z_{2n}\} = \{y_n\}$. Demostrar que $\{z_n\}$ es convergente si y sólo si $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son convergentes y $\lim_{n\to\infty} \{x_n\} = \lim_{n\to\infty} \{y_n\}$

5) i) Demostrar directamente a partir de la definición que las siguientes no son sucesiones de Cauchy.

a) $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$,
b) $\{x_n\} = \{n + \frac{(-1)^n}{n}\}$.

ii) Si $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2+x_n} \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$, demostrar que $\{x_n\}$ es una sucesión contractiva. Encontrar el límite.

6) i) Dar ejemplos de sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ propiamente divergentes con $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tales que
a) $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ es convergente,
b) $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ es propiamente divergente.

ii) Establecer la divergencia propia de las siguientes sucesiones.
a) $\{\sqrt{n}\}$, b) $\{\sqrt{n+1}\}$, c) $\{\sqrt{n-1}\}$, d) $\{\frac{n}{\sqrt{n+1}}\}$.

BASES DE MATEMÁTICAS

HOJA 3

1999-2000

---

1) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, sea J un intervalo cerrado, y sea $c \in J$. Si f_2 es la restricción de f a J, demostrar que si f tiene límite en c, entonces f_2 tiene límite en c. Demostrar que **no** se deduce que si f_2 tiene límite en c, entonces f tiene límite en c.

2) i) Sea I un intervalo, sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ e sea $c \in I$. Supóngase que existen dos números K y L tales que $|f(x) - L| \leq K|x - c|$ para $x \in I$. Demostrar que $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

ii) Usar ambas descripciones del límite, la $\epsilon - \delta$ y la de sucesiones, para establecer las siguientes proposiciones.

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x}{1+x} = \frac{1}{2}$. $(x > 0)$,

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|} = 0$. $(x \neq 0)$.

3) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de A. Además, supóngase que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in A$, y sea $\sqrt{f}$ la función definida para $x \in \mathbb{R}$ por $\sqrt{f}(x) = \sqrt{f(x)}$. Si existe $\lim_{x\to c} f(x)$, demostrar que $\lim_{x\to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to c} f(x)}$.

4) Determinar los siguientes límites y señalar los teoremas que se usan en cada caso.

$$a) \lim_{x\to 2} \sqrt{\frac{2x+1}{x+3}} \quad (x > 0), \qquad b) \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} \quad (x > 0),$$
$$c) \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^2-1}{x} \quad (x > 0), \qquad d) \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \quad (x > 0).$$

5) Evaluar los siguientes límites o demostrar que no existen.

$$a) \lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} \quad (x \neq 1), \qquad b) \lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x}} \quad (x > 0),$$
$$c) \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x} \quad (x > 0), \qquad d) \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+x} \quad (x > 0).$$

6) Supóngase que $\lim_{x\to c} f(x) = L$, donde $L > 0$, y que $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$. Demostrar que $\lim_{x\to c} f(x)\, g(x) = \infty$. Si $L > 0$, demostrar por un ejemplo que esta conclusión no se puede cumplir.

BASES DE MATEMÁTICAS

HOJA 4

1999-2000

---

1) i) Sea $k > 0$ y sea que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumpla con la condición $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ para toda $x, y \in \mathbb{R}$. Demostrar que f es continua en todo punto c de $\mathbb{R}$.

ii) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x+3 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Encontrar todos los puntos en los que g es continua.

2) i) Determinar los puntos de continuidad de las siguientes funciones e indicar los teoremas que se usan en cada caso.

$$a)\, f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad b)\, g(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} \quad (x \geq 0),$$

$$c)\, h(x) = \frac{\sqrt{1 + |\sin(x)|}}{x} \quad (x \neq 0), \qquad d)\, k(x) = cos(\sqrt{1 + x^2}) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

ii) Dar un ejemplo de una función $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea discontinua en todos los puntos de $[0, 1]$ pero tal que $|f|$ sea continua en $[0, 1]$.

3) Se dice que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **aditiva** si $f(x+y) = f(x)+f(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Demostrar que si f es continua en algún punto x_0, entonces es continua en todos los puntos de $\mathbb{R}$.

4) i) Sea $I = [a, b]$ y sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas en I. Demostrar que el conjunto $E = \{x \in I : f(x) = g(x)\}$ tiene la propiedad de que si $\{x_n\} \subseteq E$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, entonces $x_0 \in E$.

ii) Demostrar que todo polinomio de grado impar con coeficientes reales tiene al menos una raíz real.

iii) Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua y tal que $f(0) = f(1)$. Demostrar que existe un punto c en $[0, \frac{1}{2}]$ tal que $f(c) = f(c+\frac{1}{2})$. (Considerar $g(x) = f(x) -$

$f(c+\frac{1}{2})$.) Concluir que existen, en cualquier momento, puntos antípodas en el ecuador terrestre que tienen la misma temperatura.

5) Utilizando el método de localización de raíces por bisección del teorema de la raíz, determina el número n de bisecciones necesarias para encontrar $x_0 \in (0, \frac{4}{3}\,\pi)$ tal que $sen(\frac{x_0}{2}) = \frac{1}{2}$.

6) Un **punto fijo** de una función real f es un número x_0 en su dominio tal que $f(x_0) = x_0$.
i) Dibuja un grafo de una función continua $f : [0,1] \to [0,1]$. Halla un punto fijo de f.
ii) Intenta dibujar el grafo de una función continua $f : [0,1] \to [0,1]$ sin puntos fijos. ¿Cuál es el problema?
iii) Utiliza el teorema del valor intermedio para demostrar que toda función continua $f : [0,1] \to [0,1]$ tiene un punto fijo.

7) Sea $I = [0,1]$ y sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ si x es racional y $f(x) = 1 - x$ si x es irracional. Demostrar que f es inyectiva en I y que $f(f(x)) = x$ para todo $x \in I$. (Por tanto f es su propia función inversa.) Demostrar que f sólo es continua en el punto $x = \frac{1}{2}$.

BASES DE MATEMÁTICAS

HOJA 5

1999-2000

---

1) i) Derivar y simplificar

$$a)\, f(x) = \frac{x}{(1+x^2)} \quad \text{y} \quad b)\, g(x) = \sqrt{5-2x+x^2}.$$

ii) Hallar la derivada de $f(x) = \sin(x - \sin(x^2))$

2) i) Para las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, encontrar los puntos de extremos relativos y los intervalos de monotonía.
a) $g(x) = 3x - 4x^2$,
b) $h(x) = x^3 - 3x - 4$.
ii) Encontrar los puntos de extremos relativos de la función $f(x) = |x^2 - 1|$ en el intervalo $[-4, 4]$.

3) Evaluar los siguientes límites.
i)
a) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{(\log x)^2}$,
b) $\lim_{x\to 0^+} x^3 \cdot \log(x)$.
ii)
a) $\lim_{x\to 0^+} x^{2x}$,
b) $\lim_{x\to 0^+} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\arctan(x)})$.

4) i) Usar el teorema de Taylor con $n = 2$ para obtener una aproximación de $\sqrt{1.2}$ y $\sqrt{2}$.
ii) Demostrar que la función $f(x) = x^3 - 2x - 5$ tiene una solución r en el intervalo $I = [2, 2.2]$. Si $x_1 = 2$ y si se define la sucesión $\{x_n\}$ utilizando el procedimiento de Newton, demostrar que $|x_{n+1} - r| \leq 0.7|x_n - r|^2$. Demostrar que x_4 es correcto con seis cifras decimales.

5) i) Sea $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$ si $x \neq 1$ y $f(1) = 0$. Demostrar que f es integrable y calcular su integral.

ii)
a) Demostrar que si $g(x) = 0$ para $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ y $g(x) = 1$ para $\frac{1}{2} < x \leq 1$, entonces se tiene $\int_0^1 g(x)dx = \frac{1}{2}$,
b) ¿ Se sostiene la conclusión si se cambia el valor de g en el punto $\frac{1}{2}$ a 7?.

6) i) Sea $I = [a, b]$ y sean f y g funciones acotadas de I a $\mathbb{R}$. Si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$, demostrar que $L(f) \leq L(g)$ y que $U(f) \leq U(g)$.

ii) Supóngase que f es integrable en $[a, b]$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Si g se define por $g(y) = f(y - c)$ para todo $y \in [a + c, b + c]$, demostrar que g es integrable en el intervalo $[a + c, b + c]$ y que $\int_{a+c}^{b+c} g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

7) i) Encontrar F', cuando F está definida en $I = [0, 1]$ de la siguiente manera:
a) $F(x) = \int_0^x sin(t^2)dt$, b) $F(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{1+t^3}dt$,
c) $F(x) = \int_{x^2}^x \sqrt{1 + t^2}dt$, d) $F(x) = \int_0^{sin(x)} cos(t)dt$.

ii) Evaluar las siguientes integrales. Justificar cada paso.

$$a) \int_1^9 \frac{1}{2 + \sqrt{t}}dt, \quad \text{y} \quad b) \int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}}dt.$$

8) i) Si f es integrable en $[0, 1]$, se puede demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n}) (\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x)dx.$$

Utilizar el resultado anterior para expresar los límites siguientes como una integral:
a) $\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k})$,
b) $\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2})$.

ii) Establecer por qué las siguientes integrales son impropias y determinar si son convergentes o divergentes. Calcular el valor de las que sean convergentes.

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}dx \qquad b) \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$$

9) Calcular las siguientes integrales.
a)$\int x \cdot (log(x))^2 \ dx$
b)$\int \sqrt{x} \cdot log(x) \ dx$

Capítulo 2

Hojas de problemas 2000-2001

BASES DE MATEMÁTICAS

HOJA 1

2000-2001

---

1) Sean los conjuntos $A = \{3a : a \in \mathbb{N}\}$, $B = \{5a : a \in \mathbb{N}\}$.
i) Comprobar si: $5 \in A$, $10 \in B$, $5 \in A \cap B$, $45 \in A \cap B$, $27 \in A \cup B$.
ii) Demostrar que A y B son subconjuntos de los números naturales.
iii) Describir el conjunto $A \cap B$.

2) Sea C el subconjunto de los números enteros no negativos menores o iguales que 57 y D el conjunto de los números enteros mayores o iguales que -17. Determinar:
i) si C es un conjunto finito. Si lo es, calcular su cardinal,
ii) si D es un conjunto finito. Si lo es, calcular su cardinal,
iii) el conjunto $C \cap D$ y el conjunto $C \cup D$.

3) Toma el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.
i) Encontrar tres conjuntos A_1, A_2 y A_3 disjuntos y tales que su unión sea todo $\mathbb{R}$.
ii) Idem que i) pero imponiendo que A_1 y A_2 sean finitos o numerables.
iii) Encontrar dos conjuntos infinitos B_1 y B_2 tales que su unión sea $\mathbb{R}$ y su intersección sea numerable pero no finita.

4) Estudiar las propiedades de las siguientes relaciones, comprobando si son o no relaciones de orden o de equivalencia:
i) en el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ la relación
$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a)\}$,
ii) en el conjunto de los números naturales, aRb si y solamente si $a - b$ no es un número natural,
iii) en el conjunto de puntos del plano dos puntos se relacionan si hay una circunferencia con centro en el origen de coordenadas que pasa por ambos.

5) Sea la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por la expresión $f(a) = 3a + 1$. Comprobar si es inyectiva o sobreyectiva y determinar el conjunto imagen.

Idem con la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = sen(x)$.

6) Sea R la relación en $\mathbb{R}$ definida por $aRb \Leftrightarrow b$ es solución de la ecuación $ax^2 + 5x + 3 = 0$. Indicar por qué R no es una función. Explicar qué ocurre si la ecuación es $x + 5a = 0$ o $ax + 5 = 0$.

7) Calcular, si existen, el máximo y el mínimo de los siguientes conjuntos de números con el orden usual $\leq$.
i) $A = \{x \in \mathbb{N} : 0 \leq x \leq 7\}$.
ii) $B = \{3/n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$.
iii) $C = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 54\}$.
iv) $D := \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 64\}$.
v) $C \cap D$.

8) Sean f y g las funciones reales:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3x^2 + 6$,
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2x$.
Hallar $f \circ g$ y $g \circ f$.

9) Determinar y representar gráficamente el subconjunto del plano real

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R} : \quad |x| \leq |y|\}.$$

BASES DE MATEMÁTICAS

Problemas complementarios a la HOJA 1

2000-2001

---

1) Halla el subconjunto de los números reales solución de las siguientes desigualdades:

i) $3x + 5 \leq 5x - 3$, ii) $\frac{t^2-2t-3}{t^2-8t+15} \leq 0$, iii) $\frac{2-x}{\sqrt{9-6x}} \leq 0$, iv) $|2x - 3| \leq |3x - 5|$.

2) Utiliza la desigualdad de la media aritmética-geométrica,

$$\sqrt{(ab)} \leq (a + b)/2$$

donde la igualdad sólo se tiene si $a = b$, para hallar el rectángulo de mayor área entre todos los rectángulos de igual perímetro.

3) Verifica que si un cuadrado y un disco tienen igual perímetro, entonces el área del disco es mayor que el área del cuadrado.

4) Utilizando los resultados de 2) y 3) comprueba que un disco de perímetro p tiene área mayor que cualquier rectángulo de perímetro p.

5) Sean a y b números reales tales que $0 < a < b$ y sea

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}).$$

Demuestra que $a < h < b$. Al número h se le denomina media armónica de a y b.

6) La sucesión $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ se denomina sucesión armónica por la siguiente razón: el tono fundamental de una cuerda de violín de longitud l se obtiene haciendo vibrar la cuerda. El primer armónico se obtiene tocando suavemente la cuerda vibrante en su punto medio. El segundo armónico se obtiene tocando la cuerda en el punto que está a distancia $l/3$... El armónico

$(n-1)$ se obtiene tocando la cuerda vibrante a una distancia l/n del punto del inicio de la cuerda. Si $l = 1$ se obtiene justamente la sucesión $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Verificar que $1/n$ es la media armónica de $1/(n-1)$ y $1/(n+1)$.

7) Calcular, si procede, máximo, mínimo, supremo e ínfimo de los siguientes conjuntos de números reales:

i) $A = \{2, 2'2, 2'22, 2'222, 2'2222...\}$,

ii) $B = \{(-1)^n + (1/n) : n \in \mathbb{N}\}$

iii) $C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 5x - 6 \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 \leq 0\}$

8) Demostrar que para cada número real $x \in \mathbb{R}$:

$$|\frac{1}{x^2+3} + \frac{1}{|x|+6}| \leq \frac{1}{2}$$

BASES DE MATEMÁTICAS

HOJA 2

2000-2001

---

1) Sea f_n la sucesión de Fibonacci: $f_1 = 1,\ f_2 = 1$ y $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ si $n \geq 3$.

i) Escribir los diez primeros términos de la sucesión definida por $a_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$ para $n \geq 1$.

ii) Usando la definición del apartado i), probar que $a_1 = 1$ y $a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$ para $n \geq 2$.

iii) Asumiendo que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sea convergente, la **razón áurea r** se define como $r = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Verificar que $r = 1 + \frac{1}{r}$ y resolver esta ecuación.

iv) Explicar por qué el apartado iii) implica que la sucesión de Fibonacci es propiamente divergente.

2) Dar un ejemplo de sucesión que satisfaga la condición propuesta o justificar por qué no existe tal sucesión. (Hay más de una respuesta correcta.)

a) Una sucesión monótona creciente que converge a 10.

b) Una sucesión monótona acotada que no es convergente.

c) Una sucesión que converge a $\frac{3}{4}$.

d) Una sucesión no acotada que converge a 100.

3) Sea $\{\frac{n^2}{n!}\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $0! = 1! = 1$ y $n! = n\,(n-1)\,(n-2)\,\cdots 3\cdot 2\cdot 1$, si $n \geq 2$. Verificar que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!} = 0$.

4) Hallar, si existen, los siguientes límites:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$.

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, donde $a_1 > 0$ y $a_n = 1/(n\,e^{a_{n-1}})$.

5) Se inscribe un polígono regular de n lados en una circunferencia de radio R.

i) verificar que el perímetro P del polígono viene dado por la fórmula $P(n) = 2\,n\,R\,sen(\frac{a}{2})$, donde $a = \frac{2\pi}{n}$,

ii) utilizar la fórmula anterior y el hecho de que $\lim_{n\to\infty} \frac{sen(\frac{c}{n})}{\frac{c}{n}} = 1$ (donde c es una constante), para probar que una circunferencia de radio R tiene longitud $2\,\pi\,R$,

iii) modificar el razonamiento de los dos apartados anteriores para deducir que el área de un disco de radio R es $\pi\,R^2$.

6) i) Hallar, si existe, $\lim_{n\to\infty} (\frac{n+3}{n+2})^n$,

ii) calcular la relación entre a y b para que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+a}{n+1}\right)^{3n+a} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{bn}$$

7) Sea a_n el número de instrucciones de un determinado algoritmo para su ejecución sobre n datos de entrada. Se sabe que dicho algoritmo actúa de la siguiente manera:

- con un solo dato de entrada resuelve el problema usando una instrucción,

- con n datos de entrada usa $4n$ instrucciones para reducir el problema a $n-1$ datos y se ejecuta sobre ellos el mismo algoritmo.

Se pide

i) definir la sucesión recurrente $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,

ii) estudiar la monotonía y acotación de la misma,

iii) verificar por inducción que $|a_n - 2\,n^2| < 2\,n$ para todo n,

iv) deducir que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2\,n^2} = 1$.

Comentario: Estudiar el número de instrucciones de un algoritmo permite obtener una importante información, a efectos comparativos, sobre el tiempo de ejecución o el espacio de memoria que precisa, en definitiva sobre su complejidad. El resultado obtenido en el problema significa que, en este caso, para un número elevado de datos de entrada, el número de instrucciones es del orden de n^2.

8) Estudiar la convergencia de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = (1+\frac{1}{n})+(-1)^n(1-\frac{3}{n})$.

Sugerencia: considerar las subsucesiones $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{a_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

9) Sean a_0 y b_0 números reales positivos tales que $a_0 < b_0$. A partir de ellos se construyen las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de modo que

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{b_0}\right) \qquad \text{y} \qquad b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2},$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}\right) \qquad \text{y} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Verificar que para todo n, $a_{n+1} < b_{n+1}$ y estudiar la convergencia de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Nota: a_{n+1} es la media armónica de a_n y b_n y b_{n+1} es la media aritmética de a_n y b_n.

10) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_1 = 1$, y $a_n = \frac{1}{2}\, a_{n-1} + 3$ para $n \geq 2$. Demostrar que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es contractiva y calcular su límite.

BASES DE MATEMÁTICAS

HOJA 3

2000-2001

---

1) Estudia los siguientes límites:

$i)\quad \lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}, \qquad ii)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{1-cos(x)}{2tan(x)}, \qquad iii)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{tan(x)-sen(x)}{x^2},$

$iv)$ calcula a para que $\lim_{x\to\infty} (\dfrac{x+a}{x-a})^x = 4,$

$v)$ utiliza el criterio basado en sucesiones para calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)-ln(1-x)}{x}.$$

2) Halla dos funciones f y g tales que

i) existe $\lim_{x\to a} f(x)\,g(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ pero no existe $\lim_{x\to a} f(x)$,

ii) existe $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ pero no existen ni $\lim_{x\to 0} f(x)$ ni $\lim_{x\to 0} g(x)$.

3) Halla las constantes a y b para que f sea continua para todo $x \in \mathbb{R}$:

i) $f(x) = \begin{cases} ax+3 & \text{si} \quad x<1, \\ 2 & \text{si} \quad x=1, \\ x^2+b & \text{si} \quad x>1. \end{cases}$ ii) $f(x) = \begin{cases} \frac{sen(ax)}{x} & \text{si} \quad x<0, \\ 5 & \text{si} \quad x=0, \\ x+b & \text{si} \quad x>0. \end{cases}$

4) Sea

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ -x & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Verifica que f es continua sólo en $x = 0$.

5) La ecuación $x^3 - x^2 - 1 = 0$ tiene una raíz real. Utiliza el método de bisección para aproximarla con un error menor que $\frac{1}{16}$.

6) Verifica que la ecuación $x + sen(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+3}$ tiene al menos una solución en el intervalo $[0, \pi]$.

7) Usando el teorema del valor intermedio, explica por qué las agujas del reloj se superponen al menos una vez por hora.

8) Un sábado a las 8:00 de la mañana, un hombre comienza a subir corriendo la ladera de una montaña hacia su camping de fin de semana. El domingo a las 8:00 de la mañana baja corriendo la montaña. Tarda 20 minutos en subir y sólo 10 en bajar. En cierto punto del camino de bajada, el hombre se da cuenta que pasó por el mismo lugar a la misma hora al sábado. Probar que el hombre está en lo cierto. (Aplicar el teorema del valor intermedio a la función $f(t) = s(t) - r(t)$, siendo $s(t)$ y $r(t)$ las funciones de posición de subida y bajada.)

BASES DE MATEMÁTICAS

HOJA 4
(primera parte)

2000-2001

---

1) Calcula la derivada de la función $f(x)$:

$$i)\quad f(x) = ln(\frac{2tg(x)+1}{tg(x)+2}), \qquad ii)\, f(x) = 5^{cosec(x)},$$
$$iii)\ \text{si}\quad sen(x+f(x)) = f^2(x)cos(x),$$
$$iv)\ \text{si}\quad x = f(x)^2\sqrt{1-f(x)}, \qquad v)\quad arctg(\frac{sen(x)}{1+cos(x)}).$$

2) i) ¿Es derivable la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2\, sen(\frac{1}{x}) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

en $x = 0$?

ii) Determinar el ángulo que forman las curvas $y = x^2 - 1,\ y = x^3 - x$ en los puntos de corte.

Nota: El ángulo que forman dos curvas es el ángulo que forman sus tangentes.

3) Utiliza el método de derivación logarítmica para calcular la derivada de las siguientes funciones:
i) $f(x) = x^{\frac{2}{5}}(x^2+8)^4\, e^{x^2+x}$,
ii) $f(x) = \dfrac{(x+1)^4(x-5)^3}{(x-3)^8}$,
iii) $f(x) = (1+x)^{ln(1+x)}$.

4) Un semidisco de diámetro PQ se apoya en la base de un triángulo isosceles PQR formando una región (similar a un helado de cucurucho). Sea

θ el ángulo $P\hat{R}Q$. Si $A(\theta)$ es el área del semidisco y $B(\theta)$ es el área del triángulo,

i) determina $\lim\limits_{\theta\to 0^+} \dfrac{A(\theta)}{B(\theta)}$. (Escribe $A(\theta)$ y $B(\theta)$ en términos de $\frac{\theta}{2}$ y OR, donde O es el punto medio de PQ.)

ii) Calcula la variación del área de la región respecto de la variable θ cuando $\theta = \frac{\pi}{3}$.

5) La velocidad S de la sangre que está a r cm del centro de una arteria viene dada por $S = C\,(R^2 - r^2)$, donde C es una constante, R es el radio de la arteria y S se mide en cm/s.
Se administra un fármaco y la arteria empieza a dilatarse a un ritmo $\dfrac{dR}{dt}$.
A una distancia constante r, halla el ritmo de cambio de S con respecto a t para $C = 1,76 \times 10^5, \quad R = 1,2 \times 10^{-2}$ y $\dfrac{dR}{dt} = 10^{-5}$.

6) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Verificar que si $|f'(x)| < \frac{1}{3}$ para todo $x \in (a,b)$ entonces f es contractiva en (a,b).
(Una función f es contractiva en (a,b) si existe una constante C con $0 < C < 1$ tal que para todo $x, y \in (a,b) \qquad |f(y) - f(x)| \leq C|y - x|$.)

BASES DE MATEMÁTICAS

HOJA 4
(segunda parte)

2000-2001

---

1. Dadas las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = x|x|$:
i) Representar gráficamente $f(x)$, $|f(x)|$, $f(|x|)$ y $g(x)$.
ii) Estudiar, utilizando la definición de derivada en un punto:

$$[f(|x|)]', \qquad |f(x)|', \qquad g'(x) \qquad en \quad x = 0.$$

iii) Hallar $(|f| \circ g)'(0)$.
iv) Calcular $(f \circ g)'(|x|)$.

2. Estudiar la monotonía de la función:

$$f(x) = \frac{4x-3}{3x+1}$$

y determinar en que intervalos tiene inversa. En dichos intervalos calcular la derivada de la función inversa.

3. Para $n \in \mathbb{N}$ calcular:
i) La derivada n-ésima de la función $f(x) = cos(3x)cos(x)$ (utiliza una demostración por inducción para verificar la fórmula).
ii) El polinomio de Taylor de orden n de la función $f(x)$ en un entorno de $x = 0$.

4. Calcular, usando la regla de L'Hôpital, los siguientes límites:
i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x} - cos(\alpha x)}{e^{\beta x} - cos(\beta x)}$ $(\beta \neq 0)$,
ii) $\lim\limits_{x\to 1} (\frac{x}{x-1} - \frac{1}{ln(x)})$,
iii) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$,
iv) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+2cos^3(x) - 3\sqrt{cos(2x)}}{sen^4(x)}$,

v) $\lim\limits_{x\to a} \frac{cos(x)ln(x-a)}{ln(e^x-e^a)}$.

5. Dada la función $f(x) = \sqrt{x+1}$ se pide:
i) El polinomio de Taylor de grado 4 de f en $x = 0$.
ii) Calcular un valor aproximado de $\sqrt{1.02}$ utilizando un polinomio de grado 2 y dando una estimación del error cometido.

6. Usar el polinomio de Taylor de orden 3 de la función $sen(t)$ para aproximar el área de un segmento circular de ángulo t. (El área de un segmento circular de ángulo t es igual a la diferencia entre el área del sector circular y el área del triángulo determinados por el ángulo t.)

7. Estudiar si el punto $x = 0$ es extremo relativo de las funciones
i) $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$;
ii) $g(x) = x^5 sen^2(x)$.

8. Recordamos que la recta $y = mx + b$ ($m \neq 0$) es una asíntonta oblicua de una función $f(x)$ si $f(x) - (mx + b)$ tiende a 0 cuando x tiende a infinito o a menos infinito. Por tanto la determinación práctica de m y b se realiza del siguiente modo:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx).$$

Dada la función $f(x) = (x^2(1-x))^{1/3}$:
i) determina sus intervalos de crecimiento y concavidad;
ii) determina sus máximos y mínimos relativos;
iii) dibuja su gráfica.

BASES DE MATEMÁTICAS

HOJA 5

2000-2001

---

1) Usando las propiedades de la integral demostrar que para cada n natural se tiene la siguiente desigualdad:

$$|\int_0^1 \frac{e^{-nx^2}}{x+1}dx| \leq ln(2)$$

2) Hallar el valor $\mu \in \mathbb{R}$ que cumpla que

$$\int_1^3 f(x)dx = 2\mu.$$

Siendo $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 1$ si $x \in [1,2]$ y $f(x) = 2$ si $x \in (2,3]$.

Estudiar si existe algún punto $c \in (1,3)$ tal que $f(c) = \mu$.

Estudiar si la respuesta del apartado anterior contradice el teorema integral del valor medio.

3) Demostrar utilizando el teorema integral del valor medio que dados dos números reales estrictamente positivos a y b, existe $c \in (a,b)$ de modo que:

$$\int_a^b x^5 ln(1+x^3)dx = ln(1+c^3)(\frac{b^6}{6} - \frac{a^6}{6}).$$

4) Calcular la derivada de las siguientes funciones:

$$i)\ F(x) = \int_0^{x^2} sen(t^2)dt \quad ii)\ G(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{1+t^3}dt$$

$$iii)\ H(x) = \int_0^{x^2} x\,sen(t^2)dt \quad iv)\ I(x) = \int_{-x^2}^{x^2} \sqrt{1+t^2}dt.$$

5) Calcular el límite cuando x tiende a 0 de la siguiente función:

$$\frac{\int_0^{x^2} sen(\sqrt{t})dt}{x^3}.$$

6) Calcular las siguientes integrales indefinidas:

$$i) \int e^{4x}dx \qquad ii) \int \frac{x^3}{2+x^8}dx$$

$$iii) \int x^5 ln(x)dx \qquad iv) \int e^x cos(x)dx$$

$$v) \int \frac{x^2+1}{(x^4-x^2)}dx \qquad vi) \int \frac{x-1}{x^3+x^2-2x}dx.$$

7) Estudiar las siguientes integrales impropias:

$$i) \int_1^{\infty} \frac{ln(x)}{x^3}dx,$$

$$ii) \int_0^{\pi/4} \frac{cos(x)}{\sqrt{sen(x)}}dx,$$

$$iii) \int_0^4 \frac{1}{x^2+x-6}dx.$$

Capítulo 3

Hojas de problemas 2001-2002

BASES DE MATEMÁTICAS

HOJA 1

2001-2002

---

1) Sean a y b dos números naturales, A el conjunto formado por los números enteros múltiplos de a, y B el formado por los múltiplos de b. Se pide determinar el conjunto $A \cap B$ en términos del mínimo comun múltiplo entre a y b, m.c.m.(a,b).
¿Son A, B y $A \cap B$ conjuntos numerables?
¿Puedes construir una biyección entre los dos conjuntos A y B?, ¿cómo?.
Si $a = 2$ calcular el complementario relativo de A respecto de los números naturales.

2) Sea A el conjunto formado por $A = \{1, 7, x\}$, se pide:

- a) Construir una relación binaria en A, que sea simétrica y transitiva.
- b) Construir una relación binaria en A, reflexiva y antisimétrica.
- c) Construir una relación binaria en A, no simétrica y reflexiva.
- d) ¿Puede existir una relación simétrica y antisimétrica a la vez?.
- e) ¿Como se llaman las relaciones reflexivas, simétricas y transitivas?, ¿y las reflexivas, antisimétricas y transitivas?.

3) Se considera el conjunto formado por los números naturales $\mathbb{N}$, y las siguientes relaciones en $\mathbb{N}$:

- R_1 donde mR_1n si n es un múltiplo de m.
- R_2 donde mR_2n si $m - n$ es un múltiplo entero de 3.
- R_3 donde mR_3n si el máximo comun divisor entre m y n, $m.c.d.(m, n)$, es un número primo (un número entero p es primo si los únicos divisores de p son $1, -1, p, -p$).

se pide:

- a) De las anteriores relaciones, ¿cuáles son reflexivas y cuáles son simétricas?.
- b) ¿Cuáles son relaciones de orden y cuáles son de equivalencia?.
- c) ¿Hay alguna relación de orden estricto?, ¿y de orden total?.
- d) En aquellas que son relaciones de equivalencia estudia el número de clases de equivalencia.

4) Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, definida por $f(a) = (a-n)^2$, donde n es un número entero. ¿Para que valores de n, f es inyectiva, sobreyectiva, y biyectiva?. Determinar la imagen de f para $n \geq 0$.

5) Sea $f : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ definida por $f(x) = cos(x)$. ¿Es f inyectiva?, ¿y sobreyectiva?.

6) Encuentra el conjunto solución de los $x \in R$ que verifican:

- a) $|x-3| \leq 8$
- b) $|x-1| + |x-2| > 1$
- c) $|x-1||x+2| = 3$
- d) $|x| + |x-1| + |x-2| - 2.5 = 0$
- e) $\dfrac{2x+8}{x^2+8x+7} > 0$

7) Probar que:

- a) $|a+b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \geq 0$
- b) $max(\{x, y\}) = \frac{x+y+|y-x|}{2}$

8) Hallar el supremo y el ínfimo de:

$A = \{x \in R : 3x^2 - 10x + 3 < 0\}$,

$B = \{x \in \mathbb{R} : (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) < 0\}$

donde a, b, c, d son números reales tales que $a < b < c < d$,

$C = \{x = 2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$

9) Demostrar que $a = 3 + \sqrt{2}$ y $b = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ son números irracionales. (Sugerencia: usar el hecho de que $\sqrt{2}$ y $\sqrt{6}$ son irracionales.)

BASES DE MATEMÁTICAS

HOJA 2

2001-2002

---

1) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente, e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una divergente. ¿Qué puedes decir, en relación con la convergencia, de las sucesiones $\{x_ny_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{x_n+y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{x_n/y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (suponiendo que $y_n\neq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$)?

2) Probar que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente si y sólo si sus subsucesiones $\{x_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{x_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen al mismo límite.

3) Hallar, si existen, los siguientes límites

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+n^2+1}{2n^4+1}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+n^2+1}{2n^4+1}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-3n}\right)^{\frac{n^2-1}{2n}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{n-1}}{(n-1)^n}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}-n-1$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}n^{-\frac{3}{n}}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n2^n}{n!}$

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

4) Si $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, y $u_n \neq 0 \ \forall n \geq 1$, calcula

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[u_n]{\frac{3-2u_n}{3+u_n}}$$

5) Demuestra que la condición $\lim_{n\to\infty} a_n - n = 1$ implica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 1$.
Calcula ambos límites para la sucesión $a_n = n+\sqrt{n}$, ¿qué puede concluirse de este resultado?.

6) Demuestra que la siguiente sucesión es monótona acotada, calcular el límite

- $u_n = 3 + \frac{u_{n-1}}{2}$, para $n \geq 1$, $u_0 = 0$

7) Sea la sucesión definida por $u_n = 1 - \frac{u_{n-1}}{2}$, para $n \geq 1$, $u_0 = 0$.

- Demostrar que es contractiva. Hallar el límite.

BASES DE MATEMÁTICAS

HOJA 3

2001-2002

---

1. Estudia los límites laterales de las siguientes funciones en el origen, deduce a continuación si existe el límite.
   a) $f(x) = \frac{x}{|x|}$,
   b) $f(x) = \frac{1}{x}$,
   c) $f(x) = \ln(x^2)$,
   d) $f(x) = \frac{x^2}{sen(x)}$,
   e) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$,
   f) $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}$,
   g) $f(x) = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$,
   h) $f(x) = xsen(\frac{1}{x})$.
2. Estudia las asíntotas de las siguientes funciones
   a) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$,
   b) $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$,
   c) $h(x) = \ln(\frac{1}{x^2+1})$,
   d) $k(x) = \frac{senx}{x}$,
   e) $l(x) = \ln(|x-1|)$.
3. Sea f una función continua en un intervalo I abierto y acotado.
   a) Demuestra que $|f|$ también es una función continua. ¿Es cierto el recíproco?.

b) Si $f \geq C > 0$, demuestra que $\frac{1}{f}$ es una función continua y acotada.

c) ¿Puedes contruir una función continua f que no alcance su máximo absoluto en I? ¿y una función no acotada?.

d) Si I es un intervalo cerrado y acotado, ¿alcanza siempre f el mínimo absoluto en I?.

e) Sea I el intervalo cerrado $[0,1]$ y sea $f(I) = I$. Demuestra que existe un punto $x_0 \in I$ tal que $f(x_0) = x_0$.(Ayuda, considera la función $x - f(x)$).

4. Calcula el número de ceros de la función $f(x) = x - cos(x)$, y contruye un intervalo de longitud $\frac{\pi}{4}$ en el que se encuentren la raíz o raíces.

5. Calcula λ para que la función f sea continua en toda la recta real

$$f(x) = \frac{1}{\lambda x^2 - 2\lambda x + 1}.$$

6. Sea $f(x) = [x]$ (parte entera de x). Estudia los puntos de discontinuidad de f.

7. Estudia el dominio y la continuidad de las siguientes funciones

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$,

b) $f(x) = \ln(xsen(x))$,

c) $f(x) = (x^2 - 5x + 6)^{\frac{1}{3}}$,

d) $f(x) = arcsen(x^2)$,

e) $f(x) = \sqrt{(x-5)\ln(2-x)}$.

8. Estudia la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - x & \text{si } 0 < x < 1 \\ cos(\pi|2 - x^2|) + 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

9. Un caracol se encuentra en el fondo de un pozo de 1 metro de profundidad. Durante el día (12 horas) asciende 20 cm y por la noche (12 horas), mientras duerme, desciende 10 cm. Dí el número de veces que ha estado a 95 cm de profundidad, y cuantas a 90 cm, 85 cm, 10 cm y 5 cm. ¿Cuantos días y noches tarda en llegar al borde del pozo?.

10. Sabiendo que la función $f(x) = e^x$ es estrictamente creciente, estudia la monotonía de las siguientes funciones:

    a) $f(x) = \ln(x)$, $x > 0$,
    b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$,
    c) $f(x) = \frac{1}{sen(x)}$, $x \in (0, \pi)$,
    d) $f(x) = \frac{1}{sen(x)}$, $x \in (\pi, 2\pi)$.
    e) $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$.
    f) $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$, $x > 0$.

11. Estudia si las siguientes ecuaciones tienen solución

    a) $e^x - 2cos(x) = 0$,
    b) $x^3 - 2x + 5 + \frac{1}{cos(x)} = 0$,
    c) $\ln(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$, ¿Cuantas soluciones tiene la ecuación?.

12. Sea f una función estrictamente creciente y g una función decreciente, definidas en un intervalo I. ¿Cuantas soluciones tiene, a lo sumo, la ecuación $f(x) = g(x)$?. Construye dos funciones f y g en $(0, \infty)$ donde la ecuación anterior no tenga solución.

BASES DE MATEMÁTICAS

HOJA 4

2001-2002

---

1. Calcula la derivada de la función $f(x)$ en los puntos en que sea derivable:

   a) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$,

   b) $f(x) = \sqrt[5]{(cotan(x^2))^8}$,

   c) $f(x) = 3^{arcsen(\sqrt{1-x^2})}$,

   d) $f(x) = |x^2 - 4|$,

   e) $f(x) = e^{cosec(5x)}$,

   f) $f(x) = 2^{sec(x^2-3x+7)}$.

2. Utiliza la derivada logarítmica para calcular la derivada de la función

$$f(x) = \frac{(sen2x)^2(cos5x)^{1/3}(tan(x/2))^{7/5}}{(senx)^3(cos(x/3))^{1/4}}.$$

3. Estudia la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} cos(x) & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ arctan(x) & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

4. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

   a) Estudia su continuidad y derivabilidad.

   b) ¿Se puede aplicar el teorema del valor medio en $[0, 2]$?

   En caso afirmativo halla el punto (o puntos) de la tesis del teorema.

5. Halla a para que $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{ax} - e^x - x}{x^2}$ sea finito y calcula el valor del límite.

6. Halla los siguientes límites:

   a) $\lim_{x\to 0} ln(\dfrac{e^x - 1}{x})$,

   b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - cos(x)}{x^2}$,

   c) $\lim_{x\to 0^+} x^x$,

   d) $\lim_{x\to 0} (cosx)^{1/x^2}$.

7. La función $f(x) = 1 - x^{2/3}$ se anula en -1 y 1 y, sin embargo, $f'(x) \neq 0$ en $(-1, 1)$. Explica esta aparente contradicción al teorema de Rolle.

8. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = e^x + ln(x + 1)$ en el punto $(0, 1)$.

9. Demuestra la identidad $arctan(x) + arctan(1/x) = -\pi/2, \quad x < 0$.

10. Una cámara de televisión está situada en la tierra a una distancia de 4000 pies de la base de lanzamiento de una astronave. La astronave sube verticalmente y su velocidad es 600 pies/s cuando ha subido 3000 pies.

    a) Halla la tasa de cambio de la distancia entre la astronave y la cámara en ese instante,

    b) Si la cámara está siempre enfocada en la astronave, ¿cuál es la tasa de cambio del ángulo de elevación en ese instante?

11. Un objeto se mueve de forma tal que su velocidad v está relacionada a su desplazamiento s por medio de la ecuación $v = \sqrt{2gs + c}$, donde g y c son constantes. Verifica que la aceleración del objeto es constante.

12. Calcula el polinomio de Taylor de grado $n = 3$ en el origen de la función $f(x) = e^x\, ln(1 - x)$.

13. Escribe la fórmula de Taylor de orden n alrededor del punto $a = -1$ de la función $f(x) = 1/x$.

14. Representa gráficamente la función

$$f(x) = \begin{cases} |2x+1| & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 4 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

BASES DE MATEMÁTICAS

HOJA 5

2001-2002

---

1) Calcula las siguientes integrales indefinidas:
a) $\int e^{3x}dx$ b) $\int cos(2x+1)dx$
c) $\int sec^2(x)dx$ d) $\int cosec^2(x)dx$
e) $\int cosec(x)cotan(x)dx$ f) $\int cotan(x)dx$
g) $\int f'(x)sec(f(x))tan(f(x))dx$ h) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}dx$

2) Para todo $n \in \mathbb{N}$ sea

$$I_n = \int x^n e^{-x} dx.$$

Verifica que

$$I_{n+1} = -x^{n+1}e^{-x} + (n+1)I_n$$

y calcula $\int x^4 e^{-x}dx$.

3) Calcula las siguientes integrales indefinidas:
a) $\int sen^3(x)cos(x)dx$
b) $\int sen^2(x)cos^2(x)dx$
Sugerencia: $sen^2(x) = \frac{1-cos(2x)}{2}$, $cos^2(x) = \frac{1+cos(2x)}{2}$.

4) Verifica las siguientes identidades:
a) $\int \frac{2\sqrt[5]{x}+5\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}dx = \frac{40}{19}x^{\frac{19}{20}} + 4x^{\frac{5}{4}} + c,$
b) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2e^{\sqrt{x}} + c,$
c) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = arctan(e^x) + c,$
d) $\int \frac{x+5}{x+2}dx = x + 3ln(|x+2|) + c,$
e) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-3}}dx = \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9}(x-3)^{\frac{3}{2}} + c,$
f) $\int \frac{1}{xln^3(x)}dx = -\frac{1}{2\,ln^2(x)} + c.$

5) Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \frac{5x^5-3x^4+23x-12}{x^4+4}dx$,
b) $\int \frac{-x^2+2x+1}{x^3+2x^2+x}dx$,
c) $\int \frac{3x^3+4x^2+3x-1}{2x^4+2x^2}dx$.

6) Calcula las siguientes integrales indefinidas:
a) $\int 5x(3x+5)^{\frac{4}{5}}dx$,
b) $\int x^3e^{x^2}dx$,
c) $\int arcsen^2(x)dx$.

7) Calcula las siguientes integrales indefinidas:
a) $\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$ b) $\int \frac{1}{e^x-1}dx$
c) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$ d) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$
e) $\int \frac{ln(ln(x))}{xln(x)}dx$ f) $\int e^{\sqrt{x}}dx$
g) $\int \frac{sen^3(x)}{1+cos^2(x)}dx$

8) El área comprendida entre las gráficas de dos funciones continuas f y g y las rectas $x=a$ y $x=b$ es igual a

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|dx.$$

a) Halla el área comprendida entre la gráfica de las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=\sqrt{x}$.
b) Halla el área comprendida entre la gráfica de $f(x)=x^4-3x^3+2x^2-x+1$ y su recta tangente en el punto $x=0$.

9) Calcula el siguiente límite asociándolo a alguna integral definida:

$$\lim_{n\to\infty}[\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\frac{n}{n^2+9}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}].$$

10) Deriva la siguiente función:

$$F(x)=\int_{x^2}^{x^3}\frac{e^t}{t}dt, \qquad x\neq 0.$$

11) Si la función $g(t)$ viene definida mediante la ecuación

$$t=\int_1^{|g(t)|^2}\frac{sen(x)}{x}dx \qquad g(t)\neq 0,$$

calcula $g'(t)$ en términos de $g(t)$ y $(g^{-1})'(x)$.

12) Estudia la convergencia de las integrales impropias siguientes:
a) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}dx$,
b) $\int_0^1 ln(x)dx$,
c) $\int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+5}}dx$.

Parte II

Exámenes

Capítulo 4

Exámenes 1999-2000

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas (1999-2000)

Examen de nivel

---

1) Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales y sean A y B los dos conjuntos definidos por:

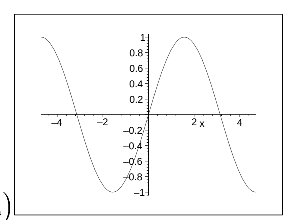
$$A = \{x \in \mathbb{N} : x^2 + 2x - 3 = 0\} \text{ y } B = \{-3, -1, 0\}.$$

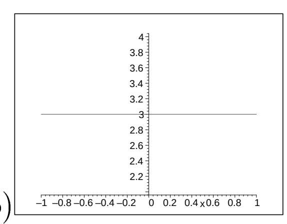
Se verifica que:
a) $A \cup B = \{-3, -1, 1\}$
b) $A \subseteq B$
c) $A \cap B = \{1\}$
d) $A \backslash B = \{1\}$

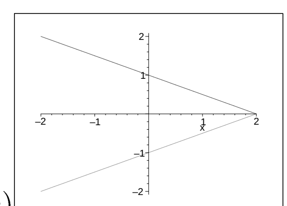
La respuesta verdadera es la ___

2)¿Cuáles de las siguientes figuras son el grafo de una función de la variable x?

¿Cuáles son el grafo de una función inyectiva? (Responder debajo de cada gráfica una de las siguientes opciones: FUNCIÓN , NO ES FUNCIÓN, FUNCIÓN INYECTIVA).

a) 

b) 

c) 

3) Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y sea $C = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| < 2\}$.

Se verifica que:

a) $C = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
b) $C = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$
c) $C = (-\infty, \sqrt{3})$
d) $C = (-\sqrt{3}, \infty)$

La respuesta verdadera es la ___
4) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $(n \geq 1)$.
Se verifica que:
a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -1$
b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ no existe
c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$
d) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$

La respuesta verdadera es la ___
5) Para todo número real x, sea $f(x) = (x^2-1)^3$. Si $Df(x)$ es la función derivada de $f(x)$, se verifica que:
a) $Df(x) = 3(2x-1)^2$
b) $Df(x) = 6x(x^2-1)^2$
c) $Df(x) = 3(x^2-1)$
d) $Df(x) = (x^2-1)^2$
La respuesta verdadera es la ___

6) Sea $I = \int_0^1 x^4 - \frac{1}{5}\ dx$.
Se verifica que:
a) $I = \frac{4}{5}$
b) $I = 0$
c) $I = \frac{2}{15}$
d) $I = \frac{6}{5}$
La respuesta verdadera es la ___

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

(Informática de Gestión) *Primer Examen Parcial A*
Fecha: 23 de Noviembre de 1999 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por siete problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

Hemos incluido un último problema, "Bonus ", que se valorará adicionalmente sobre ***0,5*** *puntos.*

1) (1 punto) Sean A,B y C tres conjuntos. Se verifica que A ∩ B ∩ C = A ∩ B
a) nunca
b) siempre
c) sólo si A = B = C
d) sólo si A ∪ B ⊆ C
e) sólo si A ∩ B ⊆ C

2) (1 punto) Sean A = {a,b,c,d,e}, $\mathbb{N}_6$ = {1,2,3,4,5,6} y

$$\begin{array}{ccc} f : A & \longmapsto & \mathbb{N}_6 \\ a & \longmapsto & 2 \\ b & \longmapsto & 4 \\ c & \longmapsto & 3 \\ d & \longmapsto & 1 \\ e & \longmapsto & 5 \end{array}$$

Se verifica que :
a) f no es una función
b) f es una función inyectiva
c) f es una función sobreyectiva

d) no existe $g: \ \mathbb{N}_6 \longmapsto \mathrm{A}$ tal que $g \circ f = Id_A$
e) $f^{-1}(\{6\}) = \{\varnothing\}$

3) (1 punto) **Definición**: *Sea A un conjunto no vacío. Una* **relación de equivalencia** $\mathcal{R}$ *en A es una relación binaria en A reflexiva,* _____________ *y* ____________.

Para completar correctamente la definición anterior hace falta añadir las palabras (no teneis que justificar vuestra respuesta):
a) antisimétrica, transitiva
b) no se puede completar la definición correctamente
c) transitiva, simétrica
d) simétrica, total

4) (1 punto) Explicar el motivo que hace que la siguiente proposición no sea verdadera.

Proposición: Toda sucesión de números reales acotada es convergente.

5) (2 puntos) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 5) \qquad \forall n \geq 1 \end{cases}.$$

Se verifica que :

a) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada por arriba por 2 y converge al valor $\frac{5}{2}$
b) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada por arriba por 3 y converge al valor $\frac{5}{2}$
c) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada por arriba por 3 y converge al valor 3
d) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y converge a $\frac{5}{2}$

6) (2 puntos) Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(1+\frac{1}{n})^{-\frac{n}{6}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\frac{5^n}{(n+3)!}\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Se verifica que :
a) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt[6]{e}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$
c) $\log_e(\lim\limits_{n\to\infty} a_n) = -\frac{1}{6}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$
d) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente

7) (2 puntos) Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ acotados. Entonces,

a) $A \cup B$ está acotado y $\sup(A \cup B) = max\{\sup(A), \sup(B)\}$
b) $A \cap B$ está acotado y $\sup(A \cap B) = max\{\sup(A), \sup(B)\}$
c) en general, $A \cup B$ no está acotado
d) en general, $A \cap B$ no está acotado

Bonus:(0.5 puntos) Si x e y son números racionales, se verifica que $x + y$ y xy son números racionales

a) siempre
b) nunca
c) en general, $x + y$ no es racional
d) en general, xy no es racional

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas (tarde)) *Examen A*

Fecha: 23 de Noviembre de 1999 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por siete problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

*Hemos incluido un último problema, "Bonus ", que se valorará adicionalmente sobre **0,5** puntos.*

1) (1 punto) **Definición**: *Sea A un conjunto no vacío. Una* **relación de orden** $\mathcal{R}$ *en A es una relación binaria en A* _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ , _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ *y transitiva.*

Para completar correctamente la definición anterior hace falta añadir las palabras (no teneis que justificar vuestra respuesta):

a) no se puede completar la definición correctamente

b) antisimétrica, reflexiva

c) reflexiva, simétrica

d) reflexiva, total

2) (1 punto) Explicar el motivo que hace que la siguiente proposición no sea verdadera.

Proposición: Toda sucesión de números reales acotada es de Cauchy.

3) (1 punto) Sean A,B y C tres conjuntos. Se verifica que $A \cup B \cup C = A \cup B$

a) nunca

b) siempre

c) sólo si $A \cup B \subseteq C$

d) sólo si $\mathrm{C} \subseteq \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$
e) sólo si $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{C}$

4) (1 punto) Sean f, g, h las tres funciones de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ definidas por

$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = 6x, \quad h(x) = x + 6.$$

Se verifica que :
a) $g \circ f = f \circ g$
b) $g \circ h = h \circ g$
c) f, g y h son todas inyectivas
d) f, g y h son todas sobreyectivas
e) $g^{-1}(\{3\}) = \{\emptyset\}$

5) (2 puntos) Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ acotados. Entonces,
a) $A \cup B$ está acotado y $inf(A \cup B) = min\{inf(A), inf(B)\}$
b) $A \cap B$ está acotado y $inf(A \cap B) = min\{inf(A), inf(B)\}$
c) en general, $A \cup B$ no está acotado
d) en general, $A \cap B$ no está acotado

6) (2 puntos) Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(1 + \frac{1}{(\frac{n}{2})})^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\frac{3^n}{n!}\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Se verifica que :
a) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$
b) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente
c) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente
d) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

7) (2 puntos) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por

$$\left\{ \begin{array}{c} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 7) \qquad \forall n \geq 1 \end{array} \right. .$$

Se verifica que :
a) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada por arriba por 2 y converge al valor $\frac{7}{3}$
b) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada por arriba por 3 y converge al valor $\frac{7}{3}$
c) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada por arriba por 3 y converge al valor 3
d) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$es decreciente y converge a $\frac{7}{3}$

Bonus:(0.5 puntos) Si x e y son números irracionales, se verifica que $x + y$ y xyson números irracionales
a) siempre
b) nunca
c) $x + y$ no es necesariamente irracional
d) xy es siempre irracional

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

(Informática de Gestión) *Segundo Examen Parcial A*
Fecha: 12 de Enero de 2000 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por ocho problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

*Hemos incluido un último problema, "Bonus ", que se valorará adicionalmente sobre **0,5** puntos.*

1) (1 punto) Sea a un número real positivo. Utiliza el teorema del valor intermedio para demostrar que existe un número positivo x tal que $x^2 = a$. (Es decir, para demostrar la existencia de la raíz cuadrada de a).

2) (1 punto) Sea $g : (-1, 2) \longmapsto \mathbb{R}$ una función tal que $\forall x \in (-1, 2)$ $|g(x)| \leq \frac{1}{4}$ y sea $f : (-1, 2) \longmapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 g(x)$. Halla $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

3) (1 punto) Completa la siguiente

Definición. *Sean A un subconjunto no vacío de R, $f : A \mapsto R$ una función y x_0 un punto de acumulación de A. Entonces $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ tal que* _ .

4) (1 punto) Sea $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x)-1}{sen(x)} & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ sen(2x) & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

¿Puedes afirmar que f tiene un valor máximo y un valor mínimo en $[-1, 1]$?

5) (2 puntos) Sea $f : (1, 3) \longmapsto \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Demuestra que existe la función inversa de f, f^{-1}, y que f^{-1} es continua en $(\frac{1}{2}, \infty)$.

6) (2 puntos) Utiliza un criterio de convergencia o de divergencia basado en sucesiones para estudiar la existencia de los siguientes límites:

$a)$ $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x + 1}{x + 1}$ $\qquad$ $b)$ $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{2}{1 - x}$

7) (2 puntos) Sea $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 2 - x & \text{si} \quad 2 < x \leq 3 \\ x - 4 & \text{si} \quad 3 < x < 4 \\ \pi & \text{si} \quad x \geqslant 4 \end{cases}$$

Encuentra los puntos de discontinuidad de g.

Bonus.(0.5 puntos) Contesta verdadero o falso.

Si f es una función definida sobre el intervalo $(0, 5)$ tal que $f(1) > 0$ y $f(3) < 0$, entonces existe un número x entre 1 y 3 con $f(x) = 0$.

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

(Informática de Gestión) *Segundo Examen Parcial B*

Fecha: 12 de Enero del 2000 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por ocho problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

*Hemos incluido un último problema, "Bonus ", que se valorará adicionalmente sobre **0,5** puntos.*

1) (1 punto) Sea $f : [-1,1] \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{sen(x)} & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ \cos(2x) & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

¿Puedes afirmar que f tiene un valor máximo y un valor mínimo en $[-1,1]$?

2) (1 punto) Completa la siguiente

Definición. *Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y $f : A \mapsto \mathbb{R}$ una función.*

Entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ *si* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ *tal que* _ .

3) (1 punto) Sea $g : (0,\pi) \longmapsto \mathbb{R}$ la función $g(x) = \cos(\frac{1}{2x})$ y sea $f : (0,\pi) \longmapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = xg(x)$. Halla $\lim_{x\to 0} f(x)$.

4) (1 punto) Sea a un número real positivo. Utiliza el teorema del valor intermedio para demostrar que existe un número positivo x tal que $x^2 = a$. (Es decir, para demostrar la existencia de la raíz cuadrada de a).

5) (2 puntos) Sea $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} 2x + x^2 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 2 - x & \text{si} \quad 2 < x \leq 3 \\ x - 4 & \text{si} \quad 3 < x < 4 \\ 0 & \text{si} \quad x \geqslant 4 \end{cases}$$

Encuentra los puntos de discontinuidad de g.

6) (2 puntos) Utiliza un criterio de convergencia o de divergencia basado en sucesiones para estudiar la existencia de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+1}{x}$ *b*) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{5}{1+x}$

7) (2 puntos) Sea $f:(1,3)\longmapsto \mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\frac{3}{3-x}$. Demuestra que existe la función inversa de f, f^{-1}, y que f^{-1} es continua en $(\frac{3}{2},\infty)$.

Bonus.(0.5 puntos) Contesta verdadero o falso.

Si f es una función continua definida sobre el intervalo $(0,5)$ tal que $f(1)>0$ y $f(3)<0$, entonces existe un número x entre 1 y 3 con $f(x)=0$.

Universidad
Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas (tarde)) *Segundo Examen Parcial A*
Fecha: 12 de Enero del 2000 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por siete problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

*Hemos incluido un último problema, "Bonus ", que se valorará adicionalmente sobre **0,5** puntos.*

1) (1 punto) Completa la siguiente

Definición. *Sean A un subconjunto no vacío de* $\mathbb{R}$, $f : A \mapsto \mathbb{R}$ una función y x_0 un punto de acumulación de A. *Entonces* $x \to x_0 f(x) = L \in \mathbb{R}$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ tal que _________________________ .

2) (1 punto) Determina si se puede aplicar el teorema del valor intermedio para demostrar que existe una solución de la ecuación $x^4 + 1 = \frac{1}{x}$ en el intervalo $(\frac{1}{2}, 1)$.

3) (1 punto) Sea $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{[sen(3x)]^2}{x^2} & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 5x^3 - 2x^2 + x + 9 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

¿Puedes afirmar que f tiene un valor máximo y un valor mínimo en $[-1, 1]$?

4) (1 punto) Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, $f, g : A \mapsto \mathbb{R}$ dos funciones y x_0 un punto de acumulación de A. Si $|f(x)| \leq g(x)$ para todo $x \in A$ y $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$, halla $x \to x_0 f(x)$.

5) (2 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si} \quad x < 0 \\ 3 - x & \text{si} \quad 0 \leq x < 3 \\ (x-3)^2 & \text{si} \quad 3 \leq x < 4 \\ 2 & \text{si} \quad x \geqslant 4 \end{cases}$$

Encuentra los puntos de discontinuidad de f.

6) (2 puntos) Sea $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$. Encuentra un subconjunto de los números reales A donde f se pueda expresar como composición de tres funciones continuas.

7) (2 puntos) Utiliza un criterio de convergencia o de divergencia basado en sucesiones para estudiar la existencia de los siguientes límites:

a) $\displaystyle \lim_{x \to 3} \frac{1}{1 - 3x}$ *b)* $\displaystyle \lim_{x \to \frac{1}{4}} \frac{3}{4x - 1}$

Bonus:(0.5 puntos) Sean $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y $h : [2,3] \to \mathbb{R}$, tres funciones tales que

$f((0,1)) = (-1, 5) \cup [7, \infty)$, $g([0, \infty)) = (-\infty, 0)$ y $h([2,3]) = (2, 5)$.

¿Cuál de las funciones f, g ó h seguramente tiene por lo menos un punto de discontinuidad en su dominio?

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas (tarde)) *Segundo Examen Parcial B*

Fecha: 12 de Enero del 2000 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por siete problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

Hemos incluido un último problema, "Bonus ", que se valorará adicionalmente sobre ***0,5*** *puntos.*

1) (1 punto) Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, $f, g : A \mapsto \mathbb{R}$ dos funciones y x_0 un punto de acumulación de A. Si $|f(x) - 5| \leq g(x)$ para todo $x \in A$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, halla $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

2) (1 punto) Sea $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{[\cos(2x)-1]^2}{x^2} & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 3x^3 - x^2 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

¿Puedes afirmar que f tiene un valor máximo y un valor mínimo en $[-1, 1]$?

3) (1 punto) Determina si se puede aplicar el teorema del valor intermedio para demostrar que existe una solución de la ecuación $x^4 - 1 = \frac{1}{2x}$ en el intervalo $(\frac{1}{2}, 2)$.

4) (1 punto) Completa la siguiente

Definición. *Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, $f : A \mapsto \mathbb{R}$ una función y x_0 un punto de acumulación de A. Entonces* $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$ *si* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ *tal que* _ .

5) (2 puntos) Utiliza un criterio de convergencia o de divergencia basado en sucesiones para estudiar la existencia de los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 2} \frac{1}{1-2x}$ *b*) $\lim_{x \to \frac{1}{3}} \dfrac{2}{1-3x}$

6) (2 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 - 3x & \text{si} \quad 0 \leq x < 3 \\ (2x-1)^2 & \text{si} \quad 3 \leq x < 4 \\ 4 & \text{si} \quad x \geqslant 4 \end{cases}$$

Encuentra los puntos de discontinuidad de f.

7) (2 puntos) Sea $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Encuentra un subconjunto de los números reales A donde f se pueda expresar como composición de tres funciones continuas.

Bonus.(0.5 puntos) Poner un ejemplo de una función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ que no sea continua al menos en un punto $a\in\mathbb{R}$ y tal que su cuadrado, es decir, la función

$$\begin{array}{rccc} f^2: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightsquigarrow & f(x)^2 \end{array}$$

sea continua en todo $\mathbb{R}$

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

Informática de Sistemas y de Gestión *Examen A*

Fecha: 11 de Febrero de 2000 **Tiempo: 2 horas**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está compuesto por seis problemas y se valorará sobre 60 puntos.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas. Esta hoja no hace falta entregarla. Tampoco es preciso copiar los enunciados de los problemas en el cuadernillo de examen que entreguéis.

La obtención en esta prueba de una calificación inferior a 21 puntos (el equivalente a 3.5 sobre 10) supondrá una calificación de suspenso *en la asignatura.*

Fecha posible de publicación de calificaciones: Martes 22 de Febrero.

1) (10 puntos) Contesta **VERDADERO** o **FALSO** (en este problema no hace falta justificar tus respuestas).

a) Si x es un número real, entonces $|x-3|>1 \Leftrightarrow x \in (2,4)$.

b) La función $f(x) = cos(x)$ es inyectiva en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

c) Una relación de orden es también una relación de equivalencia.

d) Toda sucesión creciente y de Cauchy está acotada superiormente.

e) Toda función derivable en (a,b) es continua en (a,b).

2) Calcula las siguientes integrales: a)(5 puntos) $\int_e^\infty \frac{1}{x[\ln(x)]^2}\,dx$ b)(5 puntos) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\,dx$

NOTA: $\ln(x)$ representa el logaritmo neperiano de x.

3) (8 puntos) Calcula el polinomio de Taylor $P_3(x)$ de orden 3 de la función

$$f(x) = xsen(\frac{x}{2})$$

en un entorno del punto $x_0 = 0$.

4) a)(8 puntos) Determina los puntos de extremos relativos y los intervalos de monotonía, convexidad y concavidad de la función $f(x) = x^5 - x$ en $[-2, \infty)$.

b)(4 puntos) Siendo $f(x)$ la función del apartado a), calcula el valor de $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ y representa gráficamente dicha función.

5) a)(5 puntos) Estudia la convergencia o divergencia de la sucesión $a_n = \frac{5^n}{1+7^n}$. Si converge halla su límite.

b)(5 puntos) Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -3\frac{sen(x+1)}{x+1} & \text{si} \quad x > -1 \\ \frac{x^2-x+1}{x+1} & \text{si} \quad x < -1 \\ -3 & \text{si} \quad x = -1 \end{cases}.$$

6) a)(5 puntos) Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(sen(x))$.

b)(5 puntos) Calcula la función derivada de la función $f(x) = \int\limits_0^{x^3} \sqrt{t}\, sen(t)\, dt$.

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

Informática de Sistemas y de Gestión *Examen B*

Fecha: 11 de Febrero de 2000 **Tiempo: 2 horas**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está compuesto por seis problemas y se valorará sobre 60 puntos.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas. Esta hoja no hace falta entregarla. Tampoco es preciso copiar los enunciados de los problemas en el cuadernillo de examen que entreguéis.

La obtención en esta prueba de una calificación inferior a 21 puntos (el equivalente a 3.5 sobre 10) supondrá una calificación de suspenso *en la asignatura.*

Fecha posible de publicación de calificaciones: Martes 22 de Febrero.

1) a)(8 puntos) Determina los puntos de extremos relativos y los intervalos de monotonía, convexidad y concavidad de la función $f(x) = xe^x$ en $[-2, \infty)$.

b)(4 puntos) Siendo $f(x)$ la función del apartado a), calcula el valor de $\lim_{x \to \infty} f(x)$ y representa gráficamente dicha función.

2) a)(5 puntos) Estudia la convergencia o divergencia de la sucesión $a_n = \frac{2^n}{1+3^n}$. Si converge halla su límite.

b)(5 puntos) Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x-2)+1}{x-2} & \text{si} \quad x < 2 \\ \frac{x^2-2x}{x+2} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases} .$$

3) (10 puntos) Contesta VERDADERO o FALSO (en este problema no hace falta justificar tus respuestas).

a) Toda sucesión creciente y acotada superiormente es de Cauchy.

b) La función $f(x) = sen(x)$ es inyectiva en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

c) Una relación de equivalencia es también una relación de orden.

d) El número e es irracional, pero puede expresarse como límite de una sucesión de números racionales.

e) Toda función continua en $[a, b]$ es derivable en (a, b).

4) Calcula las siguientes integrales: a)(5 puntos) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2x)\ dx$
b)(5 puntos) $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}\ dx$.

NOTA: $\ln(x)$ representa el logaritmo neperiano de x.

5) a)(5 puntos) Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln(x)}\right)$.

b)(5 puntos) Calcula la función derivada de la función $f(x) = \int_{-1}^{\cos(x)} \cos(t^2)\ dt$.

6)(8 puntos) Calcula el polinomio de Taylor $P_3(x)$ de orden 3 de la función $f(x) = xe^{-x}$ en un entorno del punto $x_0 = 0$.

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

Informática de Sistemas y de Gestión *Examen de Septiembre*

Fecha: 5 Septiembre de 2000 **Tiempo: 2h y 30min**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está compuesto por 7 problemas y se valorará sobre 100 puntos.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas. Podéis consultar apuntes, pero no está permitido el uso de calculadoras. Esta hoja no hace falta entregarla. Tampoco es preciso copiar los enunciados de los problemas en el cuadernillo de examen que entreguéis.

La obtención en esta prueba de una calificación inferior a 50 puntos supondrá una calificación de suspenso en la asignatura.

1) (14 puntos: 2 puntos para cada apartado) Contesta **VERDADERO** o **FALSO** .

En este problema **no hace falta** justificar tus respuestas.

a) Si x es un número real, entonces $|3x-1| \leq 2 \Leftrightarrow x \in [\frac{-1}{3}, 1]$.

b) La función $f(x) = 3x^2 - x$ es inyectiva en $[0, 1]$.

c) En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, sea R la relación definida por

$\forall x, y \in \mathbb{Z},\ \ xRy \Longleftrightarrow 2x - 2y = 3k$, donde k es un cualquier número entero.

Entonces R es una relación de equivalencia.

d) Toda sucesión decreciente de Cauchy está acotada superiormente.

e) Sea $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[0, 1]$ y derivable en $(0, 1)$.

Si $f(0) = 2$ y $f(1) = 5$, entonces existe $c \in (0, 1)$ tal que $Df(c) = 3$.

f) Si una función es Riemann-integrable en un intervalo acotado, entonces es continua en dicho intervalo.

g) Cuando está definido, el producto de dos funciones derivables es siempre una función derivable.

2) Estudia la convergencia de las siguientes integrales:

a)(8 puntos) $\int_0^1 e^{6x}\cos(e^{3x})\ dx$ b)(8 puntos) $\int_2^4 \frac{3x}{x-2}\ dx$
c)(8 puntos) $\int_0^1 e^{\arctan(x)}\frac{1}{1+x^2}dx$ $(arctan(1) = \frac{\pi}{4})$.
NOTA: Identifica las integrales que son propias o impropias y explica el método (o los métodos) de integración utilizado.

3) (10 puntos) Halla el valor de la constante c tal que las gráficas de las dos funciones

$$f(x) = sen(4x) \qquad \text{y} \qquad g(x) = 1 - e^{cx}$$

sean lo más parecidas posible en un entorno del punto $x_0 = 0$.
NOTA: Utiliza el teorema de Taylor.

4) (20 puntos) Determina el dominio, los límites, los puntos de extremos relativos y
los intervalos de monotonía, convexidad y concavidad de la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$
en $[0, \infty)$. Representa $f(x)$ gráficamente utilizando la información hallada.

5) a)(6 puntos) Estudia la convergencia o divergencia de la sucesión $a_n = \frac{e^{2n+1}}{n!}$.
Si converge halla su límite.

b)(8 puntos) Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si} \quad x \in (-\infty, -2) \\ \frac{-1}{4} & \text{si} \quad x = -2 \\ x + \frac{7}{4} & \text{si} \quad x \in (-2, 0] \\ \frac{7x^2-2}{4x} & \text{si} \quad x \in (0, \infty) \end{cases}.$$

6) a)(8 puntos) Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(sen(x))}{\ln(sen(2x))}$.
b)(4 puntos) Calcula la función derivada de la función $f(x) = \int\limits_0^{2x^5} \ln(1 + e^{6t})\ dt$.

7) (6 puntos) Un cuerpo está conectado a un muelle y se mueve a lo largo del eje de

las x según la ley $x(t) = sen(2t) + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos(2t)$.
¿Cuál es la distancia máxima del cuerpo del origen?
NOTA: $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, $sen(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$.

Capítulo 5

Exámenes 2000-2001

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

(Informática de Gestión) *Primer Examen Parcial*

Fecha: 27 de Noviembre del 2000 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por cinco problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre dos puntos.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

Podéis consultar apuntes, pero no está permitido el uso de calculadoras.

Determinar si las afirmaciones **de los primeros tres problemas** son verdaderas o falsas; si son verdaderas aportando un razonamiento, si son falsas indicando un contraejemplo.

1) a) Sean $A = \{a \in \mathbb{R} : |a - \frac{1}{2}| < 2\}$ y $B = \{b \in \mathbb{R} : |b+1| < 1\}$. Entonces $A \setminus B = [0, \frac{5}{4})$.

b) Sea A un conjunto no vacío y sea $f \subseteq A \times A$ una función. Entonces f no puede ser una relación simétrica.

2) a) En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, la relación binaria

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (3,4), (4,3)\}$$

es una relación de orden.

b) El conjunto $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ no es numerable.

3) a) Toda sucesión contractiva está acotada superiormente.

b) Toda sucesión acotada superiormente contiene una subsucesión convergente.

4) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 3 + \dfrac{1}{a_n} \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Verificar que

a) $\forall n \geq 1, \quad 3 \leq a_n < 4.$
b) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es contractiva.
c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existe y es igual a $\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

5) Determinar si la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\dfrac{\ln(3^{2^n})}{\ln(2^{n!})}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. Si lo es, hallar su límite. (Utilizar las propiedades del logaritmo.)

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas (mañana)) *Primer Examen Parcial*

Fecha: 27 de Noviembre del 2000 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por cinco problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre dos puntos.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

Podéis consultar apuntes, pero no está permitido el uso de calculadoras.

Determinar si las afirmaciones **de los primeros tres problemas** son verdaderas o falsas; si son verdaderas aportando un razonamiento, si son falsas indicando un contraejemplo.

1) a) Sean A, B y C tres conjuntos no vacíos. Si $A \subseteq B$ y $A \cap C = B \cap C$, entonces $C \subseteq A$.

b) Si $f : A \to B$ es una función inyectiva y $g : B \to C$ es una función sobreyectiva, entonces la función compuesta $g \circ f$ es inyectiva.

2) a) En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, la relación binaria

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (3,1), (1,3)\}$$

es una relación de equivalencia.

b) El conjunto $A = \{4n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$ es numerable.

3) a) Toda sucesión divergente es tal que todas sus subsucesiones son divergentes.

b) Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tres sucesiones tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ $\quad 0 < a_n \leq b_n \leq c_n$.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} lm\dfrac{c_n}{a_n} = 1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 1$.

4) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por

$$\begin{cases} a_1 = -15 \\ a_{n+1} = 3 - \dfrac{1}{2}|a_n| \qquad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Verificar que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es contractiva y hallar su límite.

5) Determinar si la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{1 + \dfrac{n}{n+1} sen(\dfrac{n\pi}{2})\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. Si lo es, hallar su límite.

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

(Informática de Gestión) *Segundo Examen Parcial*
Fecha: 17 de Enero del 2001 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por cuatro problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

Podéis consultar apuntes, pero no está permitido el uso de calculadoras.

1) (1 punto) ¿Pueden existir dos funciones f y g tales que

$\lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} g(x)$ no existe y $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) \in \mathbb{R}$?

2) (1 punto) Halla la derivada de la función $f(x) = 3^{arctg(x)}$.

3) (4 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ mx+b & \text{si} \quad x > 2, \end{cases}$$

estudia la derivabilidad de f en todo $\mathbb{R}$ y determina los valores de las constantes m y b para que f sea derivable en $x=2$.

4) (4 puntos) Una esfera de hielo se derrite de forma tal que su superficie disminuye a una tasa de $1 \text{ cm}^2/\text{min}$.

i) Escribe una fórmula que defina la relación existente entre la función superficie $S(t)$ de la esfera y la función longitud $r(t)$ de su radio para todo valor del tiempo t.

ii) Halla la expresión de la tasa de cambio del radio de la esfera en función de $r(t)$ y de la tasa de cambio de $S(t)$.

iii) Halla la tasa de cambio del radio cuando $r(t) = 5\text{cm}$.

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas (mañana)) *Segundo Examen Parcial*
Fecha: 17 de Enero del 2001 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por cuatro problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

Podéis consultar apuntes, pero no está permitido el uso de calculadoras.

1) (1 punto) Sea I un intervalo abierto y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en I y tal que $\frac{df}{dx}(x) < 1$ para todo $x \in I$. Verifica que f no puede tener más que un punto fijo en I.
($x \in I$ es un punto fijo de f si $f(x) = x$).

2) (1 punto) Sea $f(x) = [3\ arctg(x)]^4$. Halla $\frac{df}{dx}(x)$.

3) (4 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si} \quad x \leq 0 \\ sen(\frac{\pi x}{2}) & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \ln(x) & \text{si} \quad 1 \leq x < e \\ \frac{x}{e} & \text{si} \quad x \geq e, \end{cases}$$

estudia la continuidad de f en todo $\mathbb{R}$ y determina los valores de la constante a para que f sea continua en $x = 0$.

4) (4 puntos) Una escalera de longitud 100 cm está apoyada a una pared vertical.

Se asume que su extremidad inferior se desliza en dirección opuesta a la pared a una velocidad de 25 cm/s.

i) Encuentra una fórmula que defina la relación existente entre la función posición $x(t)$ de la extremidad inferior y el valor del ángulo $\theta(t)$ formado por la escalera y la pared para todo valor del tiempo t.

ii) Halla la expresión de la tasa de cambio de $\theta(t)$ en función de la tasa de cambio de $x(t)$ y de la función $\theta(t)$.

iii) Halla la tasa de cambio de $\theta(t)$ cuando $x(t) = 60$cm.

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

Informática de Sistemas y de Gestión *Examen A*

Fecha: 7 de Febrero de 2001 **Tiempo: 2 horas y media**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está compuesto por seis problemas y se valorará sobre 60 puntos.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas. Esta hoja no hace falta entregarla. Tampoco es preciso copiar los enunciados de los problemas en el cuadernillo de examen que entreguéis.

La obtención en esta prueba de una calificación inferior a 21 puntos (el equivalente a 3.5 sobre 10) supondrá una calificación de suspenso en la asignatura.

1) a) (6 puntos) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una función tal que $|f(n)| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se define la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = \dfrac{a_{n-1} + f(n)}{n} \quad \forall\, n \geq 2. \end{cases}$$

Demostrar por inducción que $|a_n| \leq 1 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$ y concluir que $|a_n| \leq \dfrac{2}{n}$

y que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) (6 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -3\dfrac{sen(x)}{x} & \text{si } \ x < 0 \\ acos(x) + b & \text{si } \ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\cos(x - \frac{\pi}{2}) + (x^2 - \frac{\pi^2}{4}) - 1}{(x - \frac{\pi}{2})} & \text{si } \ x > \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

elegir las constantes a y b para que f sea continua en todos los puntos de $\mathbb{R}$.

2) (8 puntos) Determina las asíntotas, los extremos relativos y los intervalos de monotonía, convexidad y concavidad de la función $f(x) = 64x^3 - 2x$ en $(-\infty, \infty)$ y representa gráficamente dicha función.

3) (10 puntos) Calcula el polinomio de Taylor $P_3(x; 0)$ de orden 3 de la función $f(x) = x\cos(2x)$ en un entorno del punto $x_0 = 0$.

4) (10 puntos) Una persona se encuentra a 30 metros de un punto P de una vía de tren.

Un tren se acerca por dicha vía a una velocidad de 90 Km/h.

¿Con qué razón decrece la distancia entre el tren y la persona cuando se encuentran a 50 metros de distancia?

5) Calcula los siguientes límites:

a) (5 puntos) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^{2x} tg(t)\ dt}{sen(2x)}$.

b) (5 puntos) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))}$.

6) Calcula las siguientes integrales

a)(5 puntos) $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}\ dx$.

b)(5 puntos) $\int_1^4 x\ 5^x\ dx$.

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

Informática de Sistemas y de Gestión *Examen B*

Fecha: 7 de Febrero de 2001 **Tiempo: 2 horas y media**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está compuesto por seis problemas y se valorará sobre 60 puntos.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas. Esta hoja no hace falta entregarla. Tampoco es preciso copiar los enunciados de los problemas en el cuadernillo de examen que entreguéis.

La obtención en esta prueba de una calificación inferior a 21 puntos (el equivalente a 3.5 sobre 10) supondrá una calificación de suspenso en la asignatura.

1) a) (6 puntos) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una función tal que $|f(n)| \leq \dfrac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se define la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = \dfrac{a_{n-1} + \ 2\ f(n)}{n} & \forall\ n \geq 2. \end{cases}$$

Demostrar por inducción que $|a_n| \leq 1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$ y concluir que $|a_n| \leq \dfrac{2}{n}$ y que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) (6 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -3\dfrac{\cos(x) - 1}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ a sen(x) + b & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{sen(x - \frac{\pi}{2})}{(x - \frac{\pi}{2})} & \text{si} \quad x > \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

elegir las constantes a y b para que f sea continua en todos los puntos de $\mathbb{R}$.

2) (8 puntos) Determina las asíntotas, los extremos relativos y los intervalos de monotonía, convexidad y concavidad de la función $f(x) = 2x^3 - 3x$ en $(-\infty, \infty)$ y representa gráficamente dicha función.

3) (10 puntos) Calcula el polinomio de Taylor $P_3(x; 0)$ de orden 3 de la función

$$f(x) = (x+1)e^{-2x}$$

en un entorno del punto $x_0 = 0$.

4) (10 puntos) Una persona se encuentra a 30 metros de un punto P de una vía de tren.

Un tren se acerca por dicha vía a una velocidad de 90 Km/h.

¿Con qué razón decrece la distancia entre el tren y la persona cuando se encuentran a 50 metros de distancia?

5) Calcula los siguientes límites:

a) (5 puntos)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{sen(x)} sen(t)\ dt}{sen(x)}.$$

b) (5 puntos)

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg(x) - x}{x - sen(x)}.$$

6) Calcula las siguientes integrales:

a)(5 puntos) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\ dx.$

b)(5 puntos) $\int_1^4 \ln(\sqrt{x})\ dx.$

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

Informática de Sistemas y de Gestión *Examen Final de Septiembre*

Fecha: 6 de Septiembre, 2001 **Tiempo: 2h y 30 min**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está compuesto por 7 problemas y se valorará sobre 100 puntos.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Los primeros cuatro problemas son obligatorios y tenéis que elegir de forma clara sólo dos **de los últimos tres problemas.**

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas. Podéis consultar apuntes, pero no está permitido el uso de calculadoras. Esta hoja no hace falta entregarla. Tampoco es preciso copiar los enunciados de los problemas en el cuadernillo de examen que entreguéis.

La obtención en esta prueba de una calificación ***inferior a 50 puntos*** *supondrá una calificación de suspenso en la asignatura.*

1) (12 puntos: 2 puntos para cada apartado) Contesta **VERDADERO** o **FALSO** .

En este problema **no hace falta** justificar tus respuestas.

a) Si x es un número real, entonces $|x-3| > 1 \Leftrightarrow x \in (2,4)$.

b) La función $f(x) = x^2$ es inyectiva en $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}] \cup [0, \frac{1}{3})$.

c) En el conjunto $A = \{a,b,c,d\}$, sea R la relación definida por $R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,d),(d,a),(a,c),(c,d)\}$.
Entonces R es una relación de equivalencia.

d) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple $x_n > \frac{1}{2}$.

e) Si x es racional, $\pi + x$ es irracional.

f) Sea A el dominio de una función real f. Si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ convergente a $x_0 \in A$ tal que $f(x_n)$ converge a $f(x_0)$, entonces f es continua en x_0.

2) (14 puntos) Sean $P_2(x,0) = 2x-2$ y $Q_2(x,0) = x^2-3x+1$ los polinomios de Taylor de orden 2 de dos funciones f y g, respectivamente, en un entorno del punto 0.

Halla el polinomio de Taylor de orden 2 de la función fg en un entorno de 0.

3) (20 puntos) Determina el dominio, las asíntotas, los límites, los extremos relativos y los intervalos de monotonía, convexidad y concavidad de la función $f(x) = \mid x^3 - 4x \mid$ y representa $f(x)$ gráficamente utilizando la información hallada.

4) Calcula las siguientes integrales:

a) (8 puntos) $\int sen(\sqrt{3x})\, dx$ b) (8 puntos) $\int \frac{5x}{(x-1)(x-2)}\, dx$

c) (8 puntos) $\int_0^1 (2x+1)3^x dx.$

Elige sólo dos de los siguientes problemas:

5) (15 puntos) A las cuatro de la tarde un coche pasa, a una velocidad de 70 Km/h, por el punto kilométrico 400 de la autopista A-7, donde la velocidad máxima permitida es 120 Km/h. Diez minutos después pasa, circulando a una velocidad de 80 Km/h, por el punto kilométrico 425 de la citada autopista. Le para la policía y le pone una multa por exceso de velocidad. ¿Tenía razón la policía? (**Sugerencia:**utiliza el teorema del valor medio).

6) (15 puntos) Se define la sucesión

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = \dfrac{a_{n-1} + n}{n^2} & \forall n \geq 2. \end{cases}$$

a) Verificar por inducción que $\forall n \geq 1, \quad |a_n| \leq 1,$

b) utilizar el apartado a) para demostrar que $|a_n| \leq \frac{2}{n} \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

c) utilizar el apartado b) para demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

7)

a) (10 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si} \quad x \in (-\infty, 0) \\ sen(\frac{\pi x}{2}) & \text{si} \quad x \in [0, 1) \\ \ln(e) & \text{si} \quad x \in [1, e] \\ \frac{x}{e} & \text{si} \quad x \in (e, \infty) \end{cases},$$

estudia su continuidad en los puntos $x = 1$ y $x = e$ y determina a para que sea continua en $x = 0$.

b) (5 puntos) Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int\limits_0^{x^3} e^{3t} dt.}{sen(x)}$$

Capítulo 6

Exámenes 2001-2002

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas (tarde)) *Examen Parcial*

Fecha: 18 de diciembre del 2001 **Tiempo: 1 h y 30 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por cinco problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre tres puntos.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

Podéis consultar apuntes, pero no está permitido el uso de calculadoras.

1) a) Sean $A = \{x \in \mathbb{R} : |x-3| < 1\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| + |x+\frac{1}{2}| > 2\}$. Determina $A \cap B$ y $B \backslash A$.

b) En el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, determina si la relación binaria

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (2,3), (3,1), (1,3)\}$$

es una relación de equivalencia.

2) Determina si la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{2 + \frac{n}{n+1}\cos(\frac{n\pi}{2})\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. (Sugerencia: escribe los primeros términos de la sucesión).

3) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por

$$\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{4}|a_n| \qquad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Verifica que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es contractiva y halla su límite.

4) Calcula, si existen, los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2 + e^{1/x}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{x}\, sen(f(x))$, donde $f(x)$ es una función cualquiera definida en un entorno de 0.

5) Estudia la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sen(3x)}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{e^{x-1}} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

y determina si la ecuación $f(x) = 0$ tiene solución en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas y Gestión) *Examen Final A*

(Evaluación continua)

Fecha: 7 de Febrero del 2002 **Tiempo: 3 horas**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está compuesto por 5 problemas y se valorará sobre 65 puntos.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas. Esta hoja no hace falta entregarla. Tampoco es preciso copiar los enunciados de los problemas en el cuadernillo de examen que entreguéis.

Podéis consultar apuntes, pero no está permitido el uso de calculadoras.

1) a) (7 puntos) Encuentra un valor de p y otro de q para que la sucesión definida como

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = pa_n + q \qquad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

sea contractiva. En tal caso calcula el límite.

b) (6 puntos) Si $p = 1$, encuentra el término general de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, y halla los valores de q para que sea convergente. (Sugerencia: Determinar los primeros términos de la sucesión).

2) (13 puntos) Calcula los máximos y mínimos absolutos de $f(x) = 2x^{\frac{5}{3}} + 5x^{\frac{2}{3}}$ en el intervalo $[-2, 1]$.

3) a) (7 puntos) Halla el polinomio de Taylor de orden 3 de $f(x) = (1 + e^x)^2$.

b) (6 puntos) Demuestra que $(1+e^x)^2 \geq 4(1+x)\ \forall x \geq 0$.

4) a) (7 puntos) Para que valores de $a, b \in \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{3}\int_0^x e^{-t^2}\,dt & \text{si } x \leq 0, \\ ax + b & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

es continua, y para que valores es derivable, en el punto 0.

b) (6 puntos) Halla el límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x\int_0^x e^{t^2}\,dt}{e^{x^2}}$$

utilizando la Regla de L'Hôpital.

5) (13 puntos) Para que valores de a la función

$$f(x) = \begin{cases} \int_{-\frac{1}{2}}^x \frac{t}{(t-1)(t^2+1)}\,dt & \text{si } -\frac{1}{2} < x \leq 0, \\ a\int_x^{\pi^2} \sqrt{t} sin(\sqrt{t})\,dt & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

es continua en el punto 0.

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas y Gestión) *Examen Final A*

(Evaluación no continua)

Fecha: 7 de Febrero del 2002 **Tiempo: 3 horas y media**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está compuesto por siete problemas y se valorará sobre 100 puntos.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Los primeros cinco problemas son obligatorios y tenéis que elegir de forma clara sólo uno **de los últimos dos problemas.**

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas. Esta hoja no hace falta entregarla. Tampoco es preciso copiar los enunciados de los problemas en el cuadernillo de examen que entreguéis.

La obtención en esta prueba de una calificación inferior a 50 puntos supondrá una calificación de suspenso en la asignatura.

Podéis consultar apuntes, pero no está permitido el uso de calculadoras.

1) a) (7 puntos) Dadas las gráficas de las relaciones f, g y h en las figura 6 determina

i) cual(es) de las tres figuras es la gráfica de una función,

ii) cual(es) de las tres figuras es la gráfica de una función inyectiva,

iii) ¿en que puntos las funciones del apartado i) no son derivables?

b) (7 puntos) Sean $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 2\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R}^+ : |ln(ax)| > 2\}$. Determina el valor de la constante $a > 0$ tal que $B \backslash A = (0, \frac{1}{ae^2})$.

2) (15 puntos) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_n = (3 - \frac{1}{n})sen(n).$$

a) Determina si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada.

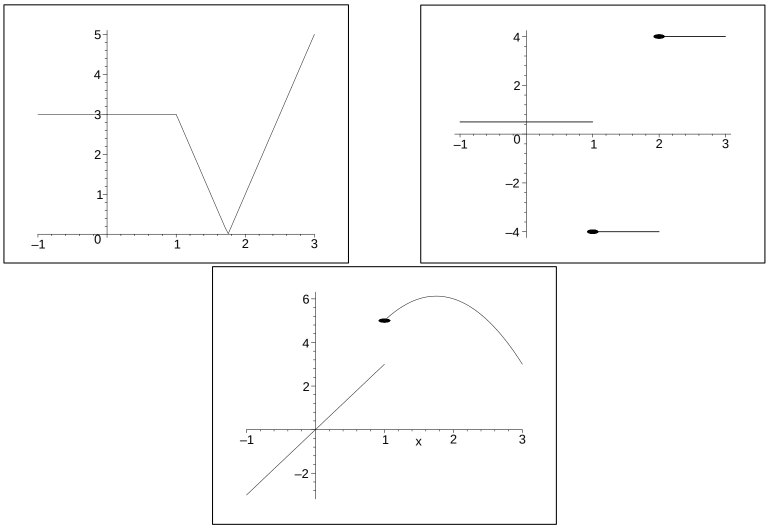


Figura 6.1: f, g y h,

b) Estudia la convergencia de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

c) ¿ Es cierto que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ continene una subsucesión monótona convergente?

3) (16 puntos) Estudia la continuidad y derivabilidad en $\mathbb{R}$ de la función

$$\text{f(x)}=\begin{cases} \frac{\int_0^x cos(2t)dt}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 \quad \text{si} & x = 0. \end{cases}$$

4) (20 puntos) Determina las asíntotas, los extremos relativos y los intervalos de monotonía, convexidad y concavidad de la función $f(x) = |x^3(x-4)| - 1$ en $(-\infty, \infty)$ y representa gráficamente dicha función. Prueba que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución en el intervalo $(0, 1)$.

5) (20 puntos) Calcula las siguientes integrales:

$$a) \int \frac{6x^2 - 24}{x^4 - 5x^2 + 4} dx,$$

$$b)\ \int_0^1 \frac{ln(x)}{x}dx.$$

Elige sólo uno de los siguientes problemas:

6) (15 puntos) Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 alrededor del origen para la función

$$f(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} e^t sen(t)dt.$$

7) (15 puntos) Sean $f(x) = \int_0^x e^{t^2}dt$ y $g(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}$.

Verifica que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ y calcula $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas y de Gestión) *Examen de septiembre*

Fecha: 6 de septiembre de 2002 **Tiempo: 9:00 a 13:00**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

Podéis consultar apuntes y libros, pero no está permitido el uso de calculadoras.

1) (1 punto) Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Estudia si la función $f(x) = x^5 + ax^4 + b$, $x \in \mathbb{R}$, posee, al menos, una raíz real (es decir, si existe algún $x_0 \in \mathbb{R}$ con $f(x_0) = 0$).

2) (2 puntos) Halla el valor de

$$\int_2^\infty \frac{x+3}{x^3 - x^2 + x - 1}\, dx.$$

3) (1 punto) Estudia si el conjunto

$$A = \left\{ 6 + \frac{1}{\sqrt{n+5}} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

tiene supremo, ínfimo, máximo y mínimo.

4) (1.5 puntos) ¿Cuál es el área más grande que puede tener un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tenga 5 cm de largo?

5) (1 punto) Estudia

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n}.$$

6) (0.5 puntos) Estamos interesados en resolver la integral indefinida

$$\int \sec^2(x)\tan(x)\,dx.$$

La sustitución $u = \tan(x)$ da por resultado

$$\int \sec^2(x)\tan(x)\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\tan^2(x)}{2} + C.$$

La sustitución $v = \sec(x)$ da por resultado

$$\int \sec^2(x)\tan(x)\,dx = \int v\,dv = \frac{v^2}{2} + C = \frac{\sec^2(x)}{2} + C.$$

¿Pueden ambos resultados ser correctos?

7) (2 puntos) Dada la función

$$y(x) = \frac{3}{4}\left(x^2 - 1\right)^{\frac{2}{3}},$$

a) estudia la derivabilidad de $y(x)$,

b) determina las asíntotas, los extremos relativos y los intervalos de monotonía, convexidad y concavidad de la función $y(x)$ y representa gráficamente dicha función.

8) (1 punto) Se dice que el *orden de contacto* de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ en un punto x_0 es igual a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ si se verifica que

$$f(x_0) = g(x_0) \quad \text{y} \quad f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) \quad \forall\, k = 1, \ldots, n.$$

Dadas las funciones

$$f(x) = \int_0^{2x^2+x} sen(t)\,dt \qquad \text{y} \qquad g(x) = ax^2 + bx + c,$$

halla $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tengan en $x_0 = 0$ orden de contacto máximo.

Parte III

Soluciones de los problemas

Capítulo 7

Soluciones de las hojas de problemas 1999-2000

BASES DE MATEMÁTICAS

Soluciones de la HOJA 1

1999-2000

---

1) Demostrar la siguiente

Proposición Sea $f : A \longrightarrow B$ una función inyectiva y sean C y D dos subconjuntos no vacíos de A. Entonces $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$. Encontrar un ejemplo de una función f no inyectiva y dos conjuntos C y D tales que $f(C \cap D) \neq f(C) \cap f(D)$.

Demostración En el caso $C \cap D = \emptyset$, $f(C \cap D) = \emptyset$. Si $y \in f(C) \cap f(D)$, $\exists c \in C$ y $\exists d \in D$ tales que $y = f(c) = f(d)$. Ya que f es inyectiva, se sigue que $c = d \in C \cap D$. Se obtiene una contradicción, ya que $C \cap D = \emptyset$.

Sea $C \cap D \neq \emptyset$. Tenemos que verificar que

$$1)\ f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$$
$$2)\ f(C \cap D) \supseteq f(C) \cap f(D)$$

1) Si $y \in f(C \cap D)$, $\exists x \in C \cap D$ tal que $y = f(x)$. Ahora, $x \in C \Longrightarrow y \in f(C)$ y $x \in D \Longrightarrow y \in f(D)$. Se sigue que $y \in f(C) \cap f(D)$.
2) Si $y \in f(C) \cap f(D)$, $\exists c \in C$ y $\exists d \in D$ tales que $y = f(c) = f(d)$. Ya que f es inyectiva, se sigue que $c = d \in C \cap D$ y que $y \in f(C \cap D)$.

Ejemplo Sea $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ la función $f(x) = x^2$ y sean $C = (-\infty, 1)$, $D = (-1, \infty)$. Entonces $f(C \cap D) = f((-1, 1)) = [0, 1]$ y $f(C) \cap f(D) = [0, \infty) \cap [0, \infty) = [0, \infty)$.

2) Demostrar que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

a) $-(a + b) = (-a) + (-b)$ b) $(-a)(-b) = ab$

c) $\frac{1}{(-a)} = -(\frac{1}{a})$ si $a \neq 0$ d) $-(\frac{a}{b}) = \frac{(-a)}{b}$ si $b \neq 0$

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned} a) \qquad & -(a + b) = (-1)(a + b) = \\ & = (-1)a + (-1)b = (-a) + (-b). \end{aligned}$$

$$b) \qquad (-a)(-b) = ((-1)a)((-1)b) =$$
$$= (-1)a(-1)b = (-1)(-1)ab = ab.$$

$$c) \qquad \text{Si } a \neq 0, \qquad \frac{1}{(-a)}(-a) = 1 \qquad \text{y} \qquad (\frac{1}{(-a)}(-a))(-\frac{1}{a}) = 1(-\frac{1}{a}),$$
$$\text{entonces,} \qquad \frac{1}{(-a)}(a\frac{1}{a}) = -\frac{1}{a} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{(-a)} = -\frac{1}{a}.$$

$$d) \qquad -\frac{a}{b} = -(a\frac{1}{b}) =$$
$$= (-1)(a\frac{1}{b}) = ((-1)a)\frac{1}{b} = (-a)\frac{1}{b} = \frac{(-a)}{b}.$$

3) Si $c > 1$, demostrar que $c^n \geq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Utilizar la desigualdad de Bernoulli: $(1+x)^n \geq 1 = nx$ (si $x + 1 > 0$) con $c = 1 + x$.

Ya que $c > 1$, $c = 1+x$ donde $x > 0$. Entonces, utilizando la desigualdad de Bernoulli,

$$\forall n \geq 1, \qquad c^n = (1+x)^n \geq 1 + nx \geq 1 + x = c.$$

4)

a) Sean A y B dos subconjuntos no vacíos acotados de $\mathbb{R}$ y sea $A + B = \{a + b : a \in A \text{ y } b \in B\}$. Demostrar que $sup(A + B) = sup(A) + sup(B)$ y que $inf(A + B) = inf(A) + inf(B)$.

Para demostrar que $sup(A + B) = sup(A) + sup(B)$, tenemos que verificar que

1) $sup(A) + sup(B)$ es una cota superior de $A + B$ y que
2) $x < sup(A) + sup(B) \Rightarrow \exists\ a + b \in A + B$ tal que $x < a + b$.

1) : ya que $\forall\ a \in A,\ a \leq sup(A)$ y $\forall\ b \in B,\ b \leq sup(B)$, se sigue que $\forall\ a + b \in A + B,\ a + b \leq sup(A) + sup(B)$.

2) : $x < sup(A) + sup(B) \Rightarrow\ x - sup(A) < sup(B)$, entonces $\exists\ b \in B$ tal que $x - sup(A) < b$. Ahora, $x - b < sup(A)$ y $\exists\ a \in A$ tal que $x - b < a$. Se sigue que $\exists\ a + b \in A + B$ tal que $x < a + b$.

Para demostrar que $inf(A+B) = inf(A) + inf(B)$, tenemos que verificar que

$$1)\ inf(A) + inf(B) \text{ es una cota inferior de } A+B \text{ y que}$$
$$2)\ x > inf(A) + inf(B) \Rightarrow \exists\ a+b \in A+B \text{ tal que } x > a+b.$$

1) : ya que $\forall\ a \in A,\ a \geq inf(A)$ y $\forall\ b \in B,\ b \geq inf(B)$, se sigue que $\forall\ a+b \in A+B,\ a+b \geq inf(A)+inf(B)$.
2) : $x > inf(A)+inf(B) \Rightarrow\ x - inf(A) > inf(B)$, entonces $\exists\ b \in B$ tal que $x - inf(A) > b$. Ahora, $x - b > inf(A)$ y $\exists\ a \in A$ tal que $x - b > a$. Se sigue que $\exists\ a+b \in A+B$ tal que $x > a+b$.

b) Sean $u > 0$ y x, y números reales tales que $x < y$, demostrar que existe un número racional r tal que $x < ru < y$. Se sigue que el conjunto $\{ru : u \in \mathbb{Q}\}$ es denso en $\mathbb{R}$.
Sean $u > 0$ y x, y números reales tales que $x < y$. Entonces $\frac{x}{u} < \frac{y}{u}$. Por el teorema de densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, $\exists\ r \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{x}{u} < r < \frac{y}{u}$. Se sigue que $x < ru < y$.

5)

a) Demostrar que si S es finito y s^* es un elemento que no está en S, entonces $S \cup \{s^*\}$ es finito.
Si S es finito, existe una función f biyectiva de $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ a S, para cierto $n \in \mathbb{N}$. Sea g la función de $\mathbb{N}_{n+1}$ a $S \cup \{s^*\}$ definida por $g(j) = f(j)$ si $j \in \mathbb{N}_n$ y $g(n+1) = s^*$. Entonces g es sobreyectiva, ya que $s^* = g(n+1)$ y f es sobreyectiva. g es también inyectiva, ya que $g(j) = g(i) = s^* \Rightarrow j = i = n+1$ y $g(j) = g(i) \in S \Rightarrow f(j) = f(i) \Rightarrow j = i$ (f es inyectiva).

b) Dar un ejemplo de una colección numerable de conjuntos finitos cuya unión no sea finita.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{n, n+1\}$. Entonces, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \mathbb{N}$ y $\forall\ j \in \mathbb{N} \Rightarrow j \in A_j$. Se sigue que $\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

BASES DE MATEMÁTICAS

Soluciones de la HOJA 2

1999-2000

---

1) i) Usar la definición de límite de una sucesión para establecer los siguientes límites:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n+5} = \frac{3}{2}$

Sea $\epsilon > 0$. Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\mid \frac{3n+1}{2n+5} - \frac{3}{2} \mid=\mid \frac{-13}{2(2n+5)} \mid= \frac{13}{2(2n+5)} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{13}{4\epsilon} - \frac{5}{2} < n$$

Por la propiedad de Arquímedes, $\forall\epsilon > 0, \exists n(\epsilon)$ tal que $\frac{13}{4\epsilon} - \frac{5}{2} < n(\epsilon)$. Se sigue que $\forall n \geq n(\epsilon)$, $\mid \frac{3n+1}{2n+5} - \frac{3}{2} \mid< \epsilon$.

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{2n^2+3} = \frac{1}{2}$

Sea $\epsilon > 0$. Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\mid \frac{n^2-1}{2n^2+3} - \frac{1}{2} \mid=\mid \frac{-5}{4n^2+6} \mid= \frac{5}{4n^2+6} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{5}{4\epsilon} - \frac{3}{2} < n^2$$

Por la propiedad de Arquímedes, $\forall\epsilon > 0, \exists n(\epsilon)$ tal que $\frac{5}{4\epsilon} - \frac{3}{2} < n(\epsilon)^2$. Se sigue que $\forall n \geq n(\epsilon)$, $\mid \frac{n^2-1}{2n^2+3} - \frac{1}{2} \mid< \epsilon$.

ii) Demostrar que:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = 0$

Sea $\epsilon > 0$. Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\mid \frac{\sqrt{n}}{n+1} \mid= \frac{\sqrt{n}}{n+1} < \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon^2} < n$$

Por la propiedad de Arquímedes, $\forall\epsilon > 0, \exists n(\epsilon)$ tal que $\frac{1}{\epsilon^2} < n(\epsilon)$. Se sigue que $\forall n \geq n(\epsilon)$, $\frac{1}{\epsilon^2} < n$ y $\mid \frac{\sqrt{n}}{n+1} \mid< \frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon$.

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1} = 0$

Sea $\epsilon > 0$. Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$| \frac{(-1)^n n}{n^2+1} |= \frac{n}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} < n$$

Por la propiedad de Arquímedes, $\forall \epsilon > 0, \exists n(\epsilon)$ tal que $\frac{1}{\epsilon} < n(\epsilon)$. Se sigue que $\forall n \geq n(\epsilon),\ \frac{1}{\epsilon} < n$ y $| \frac{(-1)^n n}{n^2+1} |\leq \frac{1}{n} < \epsilon$.

2) i) Calcular los límites de las siguientes sucesiones:
a) $\lim_{n\to\infty} (2+\frac{1}{n})^2$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$
c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$ d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{n}}$

a)Ya que la sucesión $\{2+\frac{1}{n}\}$ converge a $2+0=2$,
$\lim_{n\to\infty} (2+\frac{1}{n})^2 = 2^2 = 4$.
b)

$$\lim_{n\to\infty} | \frac{(-1)^n}{n+2} |= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0$$

Entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} = 0$
c)Ya que
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = 0$, se sigue que
$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{1} = 1$
d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = 0+0 = 0$, ya que se puede aplicar el teorema del sandwich a la sucesión $\{\frac{1}{n\sqrt{n}}\}$:

$$0 < \frac{1}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}},\ \forall n \geq 1.$$

ii) Sea $y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Demostrar que las sucesiones $\{y_n\}$ y $\{\sqrt{n} y_n\}$ convergen.

- $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$

  Por el teorema del sandwich, $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$.

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}) =$
  $= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$

3) i) Sea A un subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ que tiene una cota superior y sea $u = sup(A)$. Demostrar que existe una sucesión creciente $\{a_n\}$, con $a_n \in A\, \forall n \in \mathbb{N}$, tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = u$.

Sea $u = sup(A)$ (u existe, ya que A está acotado superiormente).

Si $u \in A$, entonces la sucesión $\{u\}$ está en A, es creciente y $\lim_{n\to\infty} u = u$.

Si $u \notin A$, entonces $\exists a_1 \in A$ tal que $u - 1 < a_1 < u$. Sea $b_1 = max\{a_1, u - \frac{1}{2}\}$. Ya que $b_1 < u$, existe a_2 tal que $b_1 < a_2 < u$. Se sigue que $a_2 \geq a_1$ y que $u > a_2 > u - \frac{1}{2}$. Similarmente, existe a_3 tal que $a_3 \geq a_2$ y $u > a_3 > u - \frac{1}{3}$. Se puede entonces definir una sucesión creciente $\{a_n\}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N},\ u > a_n > u - \frac{1}{n}$. Por el teorema del sandwich, $\lim_{n\to\infty} a_n = u$.

ii) Establecer la convergencia o divergencia de la sucesión $\{y_n\}$, donde $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} = y_n + \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$ y $\{y_n\}$ es creciente. Además, $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \leq \frac{n}{n+1} < 1$ (y_n es una suma de n términos menores o iguales a $\frac{1}{n+1}$). Ya que y_n es creciente y acotada, y_n es también convergente.

4) Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ sucesiones dadas y sea $\{z_n\}$ la sucesión definida por: $\{z_{2n-1}\} = \{x_n\}$ y $\{z_{2n}\} = \{y_n\}$. Demostrar que $\{z_n\}$ es convergente si y sólo si $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son convergentes y $\lim_{n\to\infty} \{x_n\} = \lim_{n\to\infty} \{y_n\}$

Por definición, $\{x_n\} = \{z_{2n-1}\}$ y $\{y_n\} = \{z_{2n}\}$.

"$\Rightarrow$: " si $\{z_n\}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} z_n = L$, entonces las dos subsucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son convergentes y $\lim_{n\to\infty} \{x_n\} = \lim_{n\to\infty} \{y_n\} = L$.

"$\Leftarrow$: " sean las dos subsucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ convergentes y sea

$L = \lim_{n\to\infty} \{x_n\} = \lim_{n\to\infty} \{y_n\}$. Se sigue que

$\forall \epsilon > 0,\ \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ y $\exists m(\epsilon) \in \mathbb{N}$, tales que $\forall n \geq n(\epsilon),\ \mid x_n - L \mid < \epsilon$ y $\forall n \geq m(\epsilon),\ \mid y_n - L \mid < \epsilon$. Ahora, $z_n = y_{\frac{n}{2}}$ si n es par y $z_n = x_{\frac{n+1}{2}}$ si n es impar. Entonces,

$\forall n \geq N(\epsilon) = max\{2n(\epsilon) - 1, 2m(\epsilon)\},\ \mid z_n - L \mid < \epsilon$.

5) i) Demostrar directamente a partir de la definición que las siguientes no son sucesiones de Cauchy.

- a) Sea $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$. Entonces,$\forall n, m \in \mathbb{N}$,

  $$\mid x_m - x_n \mid = \begin{cases} 0 & \text{si m y n tienen misma paridad} \\ 2 & \text{si m y n tienen paridad opuesta} \end{cases}$$

  Se sigue que, si $\epsilon = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists n, m > k$ tales que $\mid x_m - x_n \mid > 2 > \epsilon$, es decir, $\{x_n\}$ no es de Cauchy.

- b) Sea $\{x_n\} = \{n + \frac{(-1)^n}{n}\}$ y consideremos la subsucesión $\{x_{2n}\} = \{2n + \frac{1}{2n}\}$.

  $\forall n \in \mathbb{N}, \mid x_{2n+2} - x_{2n} \mid = \mid 2n + 2 + \frac{1}{2n+2} - 2n - \frac{1}{2n} \mid = \mid 2 - \frac{1}{2n(n+1)} \mid > 1.$

  Se sigue que, si $\epsilon = \frac{1}{2}$, $\forall k \in \mathbb{N}, \ \exists n > k$ tal que $\mid x_{2n+2} - x_{2n} \mid > 1 > \epsilon$, es decir, $\{x_{2n}\}$ no es de Cauchy y no puede ser convergente. Entonces, $\{x_n\}$ es divergente (contiene una subsucesión divergente) y no puede ser de Cauchy.

ii) Si $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2+x_n} & \forall n \geq 1 \end{cases}$, demostrar que $\{x_n\}$ es una sucesión contractiva. Encontrar el límite.

Ya que $x_n > 0 \ \forall n \geq 1$, $x_n + 2 > 2 \ \forall n \geq 1$ y $\mid x_{n+1} - x_n \mid = \mid \frac{1}{2+x_n} - \frac{1}{2+x_{n-1}} \mid = \mid x_n - x_{n-1} \mid \frac{1}{|(2+x_n)(2+x_{n-1})|} \leq \frac{1}{4} \mid x_n - x_{n-1} \mid$.

Entonces $\{x_n\}$ es contractiva con constante $\frac{1}{4}$ y converge. Sea $\lim_{n\to\infty} x_n = L$. Ya que $x_{n+1} = \frac{1}{2+x_n}$, $L = \frac{1}{2+L}$, es decir, $L^2 + 2L - 1 = 0$. Las raíces de esta ecuación cuadrática son $-1 \pm \sqrt{2}$. Entonces L es igual a la raíz positiva, $L = -1 + \sqrt{2}$.

6) i) Dar ejemplos de sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ propiamente divergentes con $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tales que
a) $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ es convergente,
b) $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ es propiamente divergente.

a)$\{x_n\} = \{n\}$ y $\{y_n\} = \{n\}$ b)$\{x_n\} = \{n^2\}$ y $\{y_n\} = \{n\}$

ii) Establecer la divergencia propia de las siguientes sucesiones.
a) $\{\sqrt{n}\}$, b) $\{\sqrt{n+1}\}$, c)$\{\sqrt{n-1}\}$, d)$\{\frac{n}{\sqrt{n+1}}\}$.

- a) Por la propiedad de Arquímedes, $\forall C \in \mathbb{R}, \ \exists n(C) \in \mathbb{N}$ tal que $n(C) > C^2$. Entonces, $\forall n \geq n(C), \ \sqrt{n} \geq \sqrt{n(C)} > \sqrt{C^2} = \mid C \mid > C$ y $\{\sqrt{n}\}$ es propiamente divergente.

- b) $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n+1} \geq \sqrt{n}$. Por la parte a), $\{\sqrt{n+1}\}$ es propiamente divergente.

- c) El comportamiento asintótico de $\{\sqrt{n-1}\}$ es igual a lo de $\{\sqrt{n}\}$, entonces es propiamente divergente. También, $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{n}} = 1 > 0$. Ya que, por la parte a), $\{\sqrt{n}\}$ es propiamente divergente, se sigue que $\{\sqrt{n-1}\}$ es propiamente divergente.

- d) Sean $\{x_n\} = \{\frac{n}{\sqrt{n+1}}\}$ y $\{y_n\} = \{\sqrt{n+1}\}$. Entonces, $\forall n \geq 1,\ x_n > 0, y_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 > 0$. Ya que, por la parte b), $\{\sqrt{n+1}\}$ es propiamente divergente, se sigue que $\{x_n\}$ es propiamente divergente.

BASES DE MATEMÁTICAS

Soluciones de la HOJA 3

1999-2000

---

1) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, sea J un intervalo cerrado, y sea $c \in J$. Si f_2 es la restricción de f a J, demostrar que si f tiene límite en c, entonces f_2 tiene límite en c. Demostrar que **no** se deduce que si f_2 tiene límite en c, entonces f tiene límite en c.

Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene límite en c (c es un punto de acumulación de $\mathbb{R}$), entonces $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $(x \in V_{\delta(\varepsilon)}(c) \wedge x \neq c) \Longrightarrow f(x) \in V_\epsilon(L)$.

Pero f_2 es la restricción de f a un intervalo cerrado J. Entonces $c \in J$ también es un punto de acumulación de J ya que es un intervalo cerrado. Además, $V_{\delta(\varepsilon)}(c) \cap J \subseteq V_{\delta(\epsilon)}(c)$ y por tanto $(x \in V_{\delta(\varepsilon)}(c) \cap J \wedge x \neq c) \Longrightarrow f_2(x) = f(x) \in V_\epsilon(L)$. Es decir, f_2 tiene límite en c.

No se deduce que si f_2 tiene límite en c, entonces f tiene límite en c. Para ello damos un contraejemplo.

Sea $J = [0, 2]$ y $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x < 0 \\ 0 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$.

f_2 tiene límite en 0 pero f no tiene límite en 0.

2) i) Sea I un intervalo, sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ e sea $c \in I$. Supóngase que existen dos números K y L tales que $|f(x) - L| \leq K|x - c|$ para $x \in I$. Demostrar que $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ y I es un intervalo, todo $c \in I$ es un punto de acumulación de I y $\forall \epsilon > 0$ el número $\delta(\varepsilon) = \frac{\epsilon}{K} > 0$ es tal que

$0 < |x - c| < \delta(\epsilon),\ \ x \in I \Longrightarrow |f(x) - L| \leq K|x - c| < K \cdot \frac{\epsilon}{K} = \epsilon.$

Es decir que el límite de f en c es L.

ii) Usar ambas descripciones del límite, la $\epsilon - \delta$ y la de sucesiones, para establecer las siguientes proposiciones.

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x}{1+x} = \frac{1}{2}$. $(x > 0)$,

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|} = 0$. $(x \neq 0)$.

a) definición $\epsilon-\delta$: $|\frac{x}{1+x}-\frac{1}{2}|=|\frac{2x-1-x}{2(1+x)}|=|\frac{x-1}{2(1+x)}|=\frac{|x-1|}{2(x+1)}\leq\frac{|x-1|}{2}$ ya que $x+1\geq 1$, siendo $x>0$. Luego basta tomar $\delta(\varepsilon)=2\cdot\epsilon$.

por sucesiones: sea (x_n) una sucesión cualquiera que converga a 1 con $x_n\neq 1$ $\forall n\geqslant 1$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{1+x_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{1+\lim_{n\to\infty} x_n} = \frac{1}{2}$$

b) definición $\epsilon-\delta$: $|\frac{x^2}{|x|}-0|=|x|$. Luego basta tomar $\delta(\varepsilon)=\epsilon$ y $|x-0|<\delta(\varepsilon)$ para obtener $|x|<\epsilon$.

por sucesiones: sea (x_n) una sucesión cualquiera que converga a 0 con $x_n\neq 0$ $\forall n\geqslant 1$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)= \lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{|x_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x_n|^2}{|x_n|} = \lim_{n\to\infty}|x_n| = 0$$

3) Sea $A\subseteq\mathbb{R}$, sea $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ y sea $c\in\mathbb{R}$ un punto de acumulación de A. Además, supóngase que $f(x)\geq 0$ para todo $x\in A$, y sea $\sqrt{f}$ la función definida para $x\in\mathbb{R}$ por $\sqrt{f}(x)=\sqrt{f(x)}$. Si existe $\lim_{x\to c} f(x)$, demostrar que $\lim_{x\to c}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to c} f(x)}$.

Sea

$$L=\lim_{x\to c} f(x)\geq 0$$

entonces $\forall\epsilon>0$ $\exists\delta(\epsilon)>0$ tal que $(0<|x-c|<\delta \quad\wedge\quad x\in A)\Longrightarrow |f(x)-L|<\epsilon$.

Hay dos casos:

1) si $L=0$, entonces $|\sqrt{f(x)}-\sqrt{L}| = \sqrt{f(x)}$ y $\forall\epsilon>0$ $\exists\delta(\epsilon)>0$ tal que $(0<|x-c|<\delta(\varepsilon) \quad\wedge\quad x\in A)\Longrightarrow |f(x)-L|=f(x)<\epsilon^2$. Se sigue que $\forall\epsilon>0$ $\exists\delta(\epsilon)>0$ tal que $(0<|x-c|<\delta(\varepsilon) \quad\wedge\quad x\in A)\Longrightarrow |\sqrt{f(x)}-\sqrt{L}| = |\sqrt{f(x)}|=\sqrt{f(x)}<\epsilon$.

2) si $L>0$, entonces $|\sqrt{f(x)}-\sqrt{L}| = |\frac{(\sqrt{f(x)}-\sqrt{L})(\sqrt{f(x)}+\sqrt{L})}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{L}}| = \frac{|f(x)-L|}{f(x)+\sqrt{L}} \leq \frac{|f(x)-L|}{\sqrt{L}}$ ya que $\sqrt{f(x)}\geq 0$.

Luego $\forall\epsilon>0$ $\exists\delta(\epsilon)>0$ tal que $(0<|x-c|<\delta \quad\wedge\quad x\in A)\Longrightarrow |f(x)-L|<\epsilon\cdot\sqrt{L}\Longrightarrow|\sqrt{f(x)}-\sqrt{L}|<\varepsilon$.

4) Determinar los siguientes límites y señalar los teoremas que se usan en cada caso.

$$a) \lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{2x+1}{x+3}} \quad (x>0), \qquad b) \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} \quad (x>0),$$
$$c) \lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^2-1}{x} \quad (x>0), \qquad d) \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \quad (x>0).$$

a) Como $x>0$ entonces se tiene $\frac{2x+1}{x+3}>0$ y podemos utilizar el ejercicio anterior para deducir

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{2x+1}{x+3}} = \sqrt{\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{x+3}} = \sqrt{\frac{4+1}{2+3}} = 1$$

b)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)\cdot(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x+2 = 4$$

c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^2-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+1+2x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x+2}{1} = 2$$

d)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

5) Evaluar los siguientes límites o demostrar que no existen.

$$a) \lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1} \quad (x\neq 1), \qquad b) \lim_{x\to \infty}\frac{x+2}{\sqrt{x}} \quad (x>0),$$
$$c) \lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt{x+1}}{x} \quad (x>0), \qquad d) \lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+x} \quad (x>0).$$

a)

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x-1} = \infty$$

ya que $\forall\alpha\in\mathbb{R}$,$\alpha>0$, si $\delta(\alpha)=\frac{1}{\alpha}>0$,se sigue que para toda $x\in\mathbb{R}$ con $0<x-1<\delta(\alpha)$, tenemos que

$f(x)=\frac{x}{x-1}>\frac{x}{\delta(\alpha)}>\frac{1}{\delta(\alpha)}=\alpha$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x-1} \;=\; -\infty$$

ya que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha < -1$, si $\delta(\alpha) = \frac{1}{-\alpha} > 0$, se sigue que tal que para toda $x \in \mathbb{R}$ con $-\delta(\alpha) = \frac{1}{\alpha} < x-1 < 0$, tenemos que $f(x) = \frac{x}{x-1} < \frac{x}{-\delta(\alpha)} < \frac{1}{-\delta(\alpha)} = \alpha$

Por tanto no existe

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1}$$

ya que los límites por la derecha y por la izquierda son diferentes.

Nota: se puede también verificar que las dos sucesiones $(x_n) = (1+\frac{1}{n})$ y $(y_n) = (1-\frac{1}{n})$ tienen límite igual a 1,

pero $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = -\infty$.

b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x}} \;=\; \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{(x+2)^2}{x}} \;=\; \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+4x+4}{x}} \;=$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+4+\frac{4}{x}} \;=\; \sqrt{\lim_{x\to\infty} (x+4+\frac{4}{x})} = \;\infty$$

Ya que para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$,si $K > \max\{0, \alpha - 4\}$ se sigue que $\forall x > K$, $x + 4 + \frac{4}{x} > x + 4 > K + 4 > \alpha$, y se puede aplicar el problema 3 de esta hoja para raices cuadradas.

c)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x} \;=\; \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}{\frac{x}{x}} = 0$$

ya que

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 0$$

por el problema 3 de esta hoja para raices cuadradas ya que tenemos $x > 0$.

d)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+x} \;=\; \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{x}{x^2}}-\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x}{x^2}}+\frac{x}{x}} = \frac{-1}{1} = -1$$

donde hemos aplicado de nuevo el problema 3 de esta hoja para raices cuadradas ya que tenemos $x > 0$

6) Supóngase que $\lim_{x\to c} f(x) = L$, donde $L > 0$, y que $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$. Demostrar que $\lim_{x\to c} f(x)\, g(x) = \infty$. Si $L > 0$, demostrar por un ejemplo que esta conclusión no se puede cumplir.

Sea $c \in A = dom(f) = dom(g) \subseteq \mathbb{R}$ y sean $\lim_{x\to c} f(x) = L > 0$ y $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$.

Ya que $\lim_{x\to c} f(x) = L > 0$ y $\frac{L}{2} > 0$, existe $\delta_1(\frac{L}{2}) > 0$ tal que para toda $x \in A$, $0 < |x - c| < \delta_1(\frac{L}{2}) \Longrightarrow |f(x) - L| < \frac{L}{2}$ (en particular, $f(x) > L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2}$).

Sea ahora $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

Ya que $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$ y $\frac{2\alpha}{L} > 0$, existe $\delta_2(\frac{2\alpha}{L}) > 0$ tal que para toda $x \in A$,

$0 < |x - c| < \delta_2(\frac{2\alpha}{L}) \Longrightarrow g(x) > \frac{2\alpha}{L}$.

Entonces $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$, $f(x)g(x) > \frac{L}{2}\frac{2\alpha}{L} = \alpha$ si $x \in A$ y $0 < |x - c| < \delta(\alpha) = \min\{\delta_1(\frac{L}{2}), \delta_2(\frac{2\alpha}{L})\}$, es decir $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = \infty$.

Si $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{x}$ en $(0, \infty) = A$, se sigue que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$ pero

$\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1 \neq \infty$.

BASES DE MATEMÁTICAS

Soluciones de la HOJA 4

1999-2000

---

1) i) Sea $k > 0$ y sea que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumpla con la condición $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ para toda $x, y \in \mathbb{R}$. Demostrar que f es continua en todo punto c de $\mathbb{R}$.

Solución: Sea $c \in \mathbb{R}$, c es un punto de acumulación de $\mathbb{R}$. Si $\epsilon > 0$, se tiene que:

$|f(x) - f(c)| \leq k|x - c| < \epsilon$ siempre que $|x - c| < \delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{k}$.

Se sigue por tanto que f es continua en todo $\mathbb{R}$.

ii) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x + 3 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Encontrar todos los puntos en los que g es continua.

Solución:

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x + 3 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Sea $c \in \mathbb{R}$, c es un punto de acumulación de $\mathbb{R}$. Sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de racionales que converge a c e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de irracionales que converge a c. Estas dos sucesiones existen por el teorema de densidad de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. Entonces

$$\lim_{n \to \infty} g(x_n) = \lim_{n \to \infty} 2 \cdot x_n = 2c$$

$$\lim_{n \to \infty} g(y_n) = \lim_{n \to \infty} y_n + 3 = c + 3$$

Se tiene que $2c \neq c + 3$ si $c \neq 3$. Por tanto g es discontinua para todo $c \neq 3$, por el criterio de divergencia basado en sucesiones.

Si $c = 3$ y (x_n) es una sucesión cualesquiera de números reales tal que

$\lim_{n\to\infty} x_n = 3$, se sigue que

$$|g(x_n) - g(3)| = \begin{cases} 2|x_n - 3| & \text{si } \ x_n \in \mathbb{Q} \\ |x_n - 3| & \text{si } x_n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Tenemos por tanto que $|g(x) - g(3)| \leq 2|x-3| \ \forall x \in \mathbb{R}$. Por el problema anterior con $K = 2$, g es continua en $x = 3$.

2) i) Determinar los puntos de continuidad de las siguientes funciones e indicar los teoremas que se usan en cada caso.

$$a)\, f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad b)\, g(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}} \quad (x \geq 0),$$

$$c)\, h(x) = \frac{\sqrt{1+|\sin(x)|}}{x} \quad (x \neq 0), \qquad d)\, k(x) = cos(\sqrt{1+x^2}) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

a) Es el cociente de dos funciones continuas y el denominador nunca vale 0. Entonces es continua en $\mathbb{R}$

b)

$$g(x) = h(x+\sqrt{x}) = h(t(\sqrt{x})) = h \circ t \circ h \ (x)$$

donde $h(x) = \sqrt{x}$ y $t(x) = x + x^2$ siendo h y t continuas en $(0, \infty)$ y teniendo $Im(h)$ e $Im(t \circ h)$ contenidas en $(0,\infty)$. Por tanto g es continua en $(0,\infty)$.

c) La función $\sqrt{1+|\sin(x)|}$ es continua en $\mathbb{R}$ ya que es la composición de las funciones continuas en todo $\mathbb{R}$ $\quad 1+x, |x|, \sin(x)$, y de la función $\sqrt{x}$ continua en $[0,\infty]$ e $Im(1+\sin(x)) \subseteq [0,\infty]$. $h(x)$ es el cociente de funciones continuas y el denominador es nulo en $x = 0$. Por tanto $h(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

d) La función $k(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ ya que es la composición de las funciones continuas en todo $\mathbb{R}$ $\quad \cos x, 1+x^2$, y de $\sqrt{x}$ que es continua en $[0,\infty]$ e $Im(1+x^2) \subseteq [0,\infty]$.

ii) Dar un ejemplo de una función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea discontinua en todos los puntos de $[0,1]$ pero tal que $|f|$ sea continua en $[0,1]$.

Ejemplo: $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Se tiene que $|f(x)| = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) Se dice que una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es **aditiva** si $f(x+y)=f(x)+f(y)$ para todos $x,y\in\mathbb{R}$. Demostrar que si f es continua en algún punto x_0, entonces es continua en todos los puntos de $\mathbb{R}$.

Si f es continua en $x_0\in\mathbb{R}$, entonces para toda sucesión (x_n) de reales tales que $\lim_{n\to\infty}\ x_n=x_0$ se tiene $\lim_{n\to\infty}\ f(x_n)=f(x_0)$. Sea ahora $x\in\mathbb{R}$ y sea (y_n) una sucesión cualquiera de reales tales que $lim_{n\to\infty}\,y_n=x$, tenemos que verificar que $lim_{n\to\infty}\ f(y_n)=f(x)$. La sucesión $x_n=y_n-x+x_0$ es tal que $lim_{n\to\infty}\ x_n=x-x+x_0=x_0$ y $lim_{n\to\infty}\ f(y_n)=lim_{n\to\infty}\ f(x_n+x-x_0)=lim_{n\to\infty}\ [f(x_n-x_0)+f(x)]==\ lim_{n\to\infty}\ [f(x_n)+f(-x_0)+f(x)]=f(x_0)-f(x_0)+f(x)=f(x)$, si podemos verificar que $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(-x)=-f(x)$. Ahora, $f(0)=f(0+x)=f(0)+f(x)$, entonces $f(0)=0$. Además $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(0)=f(x-x)=f(x)+f(-x)$, por lo tanto $f(-x)=f(x)$.

4) i) Sea $I=[a,b]$ y sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones continuas en I. Demostrar que el conjunto $E=\{x\in I:f(x)=g(x)\}$ tiene la propiedad de que si $\{x_n\}\subseteq E$ y $\lim_{n\to\infty}\ x_n=x_0$, entonces $x_0\in E$.

Respuesta: Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq E$ t.q. $\lim_{n\to\infty}\ x_n=x_0$. Ya que $a\le x_n\le b\ \forall n\ge 1$ se sigue que $a\le x_0\le b$, es decir $x_0\in I$. Ademas, tenemos que $f(x_n)=g(x_n)\ \forall n\ge 1$ y que, por continuidad de f y g,

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty}\ f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\ g(x_n)=g(x_0)$$

Por tanto $x_0\in E$.

ii) Demostrar que todo polinomio de grado impar con coeficientes reales tiene al menos una raíz real.

Respuesta: Sea $p(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ un polinomio con $a_k\in\mathbb{R}$ tal que $a_n\neq 0$ y n es impar. Tenemos

$$\lim_{x\to\infty}\ \frac{p(x)}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\ (a_n+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k}{x^{n-k}})=a_n+\sum_{k=0}^{n-1}(\lim_{x\to\infty}\ \frac{a_k}{x^{n-k}})=a_n+0=a_n$$

$$\lim_{x\to-\infty}\ \frac{p(x)}{x^n}=\lim_{x\to-\infty}\ (a_n+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k}{x^{n-k}})=a_n+\sum_{k=0}^{n-1}(\lim_{x\to-\infty}\ \frac{a_k}{x^{n-k}})=a_n+0=a_n$$

Entonces

$$\lim_{x\to\infty}\ x^n=\infty\Longrightarrow\lim_{x\to\infty}\ p(x)=\begin{cases}\infty & \text{si } a_n>0\\ -\infty & \text{si } a_n<0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} p(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } a_n > 0 \\ \infty & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

En ambos casos ($a_n < 0$ ó $a_n > 0$) $p(x)$ toma valores positivos y negativos. Como los polinomios son funciones continuas, por el teorema del valor intermedio, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $p(x_0) = 0$.

iii) Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua y tal que $f(0) = f(1)$. Demostrar que existe un punto c en $[0, \frac{1}{2}]$ tal que $f(c) = f(c+\frac{1}{2})$. (Considerar $g(x) = f(x) - f(c+\frac{1}{2})$.) Concluir que existen, en cualquier momento, puntos antípodas en el ecuador terrestre que tienen la misma temperatura.

Respuesta: Sea $g(x) = f(x) - f(x+\frac{1}{2})$, $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$. g es continua siendo la diferencia de las dos funciones continuas $f(x)$ y $f(h(x))$, donde $h(x) = x + \frac{1}{2}$. Además,

$$g(0) = f(0) - f(\frac{1}{2}) \qquad g(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - f(1) = f(\frac{1}{2}) - f(0) = -g(0)$$

Si $g(\frac{1}{2}) = -g(0) = 0$ entonces $f(0) = f(\frac{1}{2})$ y $c = 0$ cumple $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.

Si $g(0) \neq 0$, $g(0)$ y $g(\frac{1}{2})$ tienen signos opuestos y existe c entre 0 y $\frac{1}{2}$ tal que $g(c) = 0$ y $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.

5) Utilizando el método de localización de raíces por bisección del teorema de la raíz, determina el número n de bisecciones necesarias para encontrar $x_0 \in (0, \frac{4}{3}\pi)$ tal que $sen(\frac{x_0}{2}) = \frac{1}{2}$.

Respuesta: Sea $f(x) = \sin(\frac{x}{2}) - \frac{1}{2}$. f es continua en todo $\mathbb{R}$ y

$$f(0) = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0 \qquad f(\frac{4\pi}{3}) = \sin(\frac{2\pi}{3}) - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} > 0$$

Ahora hacemos una segunda iteración

$$f(\frac{2\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{3}) - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} > 0 \qquad f(\frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Por tanto el número de bisecciones necesarias es $n = 2$.

6) Un **punto fijo** de una función real f es un número x_0 en su dominio tal que $f(x_0) = x_0$.

i) Dibuja un grafo de una función continua $f : [0,1] \to [0,1]$. Halla un punto fijo de f. Respuesta: por ejemplo, $f(x) = x^2$. Sus puntos fijos son $x = 0$ y $x = 1$.

ii) Intenta dibujar el grafo de una función continua $f : [0,1] \to [0,1]$ sin puntos fijos. ¿Cuál es el problema?
Respuesta: No se puede, ya que al intentar dibujarla siempre se toca la diagonal (la recta $y = x$). Es decir que hay puntos fijos.

iii) Utiliza el teorema del valor intermedio para demostrar que toda función continua $f : [0,1] \to [0,1]$ tiene un punto fijo.
Respuesta: Sea $h(x) = x - f(x)$. h es continua en $[0,1]$. Si $h(0) = 0 - f(0) < 0$ y $h(1) = 1 - f(1) > 0$, por el teorema del valor intermedio de Bolzano existe un x_0 tal que $h(x_0) = 0$. Pero entonces se tiene $h(x_0) = x_0 - f(x_0) = 0$ es decir, $x_0 = f(x_0)$. Si $h(0) = 0 - f(0) = 0$ o si $h(1) = 1 - f(1) = 0$, 0 ó 1 son puntos fijos de $f(x)$.

7) Sea $I = [0,1]$ y sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ si x es racional y $f(x) = 1 - x$ si x es irracional. Demostrar que f es inyectiva en I y que $f(f(x)) = x$ para todo $x \in I$. (Por tanto f es su propia función inversa.) Demostrar que f sólo es continua en el punto $x = \frac{1}{2}$.

Primero se tiene que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ y $f(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ya que $1 - x$ no puede ser racional si x es irracional.

f es inyectiva en I ya que $f(x) = f(y)$ implica que x e y son los dos racionales o irracionales. Si $f(x) = f(y) \in \mathbb{Q}$ entonces $x = y$. Si $f(x) = f(y) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ entonces $1 - x = 1 - y$, es decir, $x = y$. Además,

$$f(f(x)) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - f(x) = x & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Por tanto tenemos que $f(f(x)) = f(x)$ en $\mathbb{R}$.

Sea $c \in \mathbb{R}$, utilizando el método de la solución del problema 1), ii), se verifica que $c \neq 1 - c$ siempre que $c \neq \frac{1}{2}$. Luego f no es continua en $c \neq \frac{1}{2}$.

Sea (x_n) una sucesión de reales que converge a $\frac{1}{2}$, entonces

$$|f(x_n) - f(\frac{1}{2})| = |f(x_n) - \frac{1}{2}| = \begin{cases} |x_n - \frac{1}{2}| & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ |1 - x_n - \frac{1}{2}| = |\frac{1}{2} - x_n| & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Por tanto $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\frac{1}{2})$. (Basta aplicar el problema 1), i), con $K = 1$.)

BASES DE MATEMÁTICAS

Soluciones de la HOJA 5

1999-2000

---

1) i) Derivar y simplificar

$$a)\, f(x) = \frac{x}{(1+x^2)} \quad \text{y} \quad b)\, g(x) = \sqrt{5-2x+x^2}.$$

Respuesta: a)

$$f'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

b)

$$g'(x) = \frac{1}{2}(5-2x+x^2)^{\frac{-1}{2}} \cdot (-2+2x) = \frac{-2+2x}{2\sqrt{5-2x+x^2}} = \frac{-1+x}{\sqrt{5-2x+x^2}}$$

ii) Hallar la derivada de $f(x) = \sin(x - \sin(x^2))$
Respuesta:

$$f'(x) = \cos(x - \sin(x^2)) \cdot (1 - (\cos(x^2) \cdot 2x))$$

2) i) Para las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, encontrar los puntos de extremos relativos y los intervalos de monotonía.
a) $g(x) = 3x - 4x^2$,
b) $h(x) = x^3 - 3x - 4$.
Respuesta: a) $g'(x) = 3 - 8x$ $g''(x) = -8$. Igualando la primera derivada a 0 tenemos $3 - 8x = 0$ si $\frac{3}{8}$ y $g''(\frac{3}{8}) = -8 \leq 0$. Por tanto $\frac{3}{8}$ es un punto de máximo local. Ahora estudiamos la monotonía: $g'(x) > 0$ si $x < \frac{3}{8}$ y $g'(x) < 0$ si $x > \frac{3}{8}$. Por tanto la función es creciente en $(-\infty, \frac{3}{8})$ y decreciente en $(\frac{3}{8}, \infty)$.

b) $h'(x) = 3x^2-3$, $h''(x) = 6x$. Igualando la primera derivada a 0 tenemos $3x^2 - 3 = 0 \to x^2 = 1 \to x = 1, x = -1$ y $h''(1) = 6 \geq 0$, $h''(-1) = -6$. Por tanto 1 es un punto de mínimo local y -1 es un punto de máximo local. Ahora estudiamos la monotonía: $h'(x) > 0$ si $x^2 > 1$ y $h'(x) < 0$ si $x^2 < 1$. Por tanto la función es decreciente en $(-1,1)$ y creciente en $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.

ii) Encontrar los puntos de extremos relativos de la función $f(x) = |x^2-1|$ en el intervalo $[-4,4]$.

Respuesta: podemos escribir $f(x)$ de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si} \quad x \in [-4,-1]\cup[1,4] \\ -x^2+1 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \end{cases}$$

La función $f(x)$ no es derivable en $x=1$ y $x=-1$. En puntos distintos de 1 y -1 la derivada de $f(x)$ es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \in [-4,-1)\cup(1,4] \\ -2x & \text{si} \quad -1 < x < 1 \end{cases}$$

Igualando la primera derivada a 0 obtenemos que $f'(x) = 0$ si $x = 0$. Como tenemos $f''(0) = -2$, entonces $f(0) = 1$ es un máximo local de f.

Estudiemos la monotonía: $f'(x) > 0$ si $x \in (1,4]$ o si $x \in (-1,0)$. Luego la función es estrictamente creciente en $(-1,0)\cup(1,4]$ y estrictamente decreciente en $[-4,-1)\cup(0,1)$.

Viendo como crece y decrece, podemos decir que la función tiene mínimos locales en $x=-1$ y $x=1$, donde $f(-1) = f(1) = 0$. Ya que $f(4) = f(-4) = 15$, se sigue que $x=-4$ y $x=4$ son puntos de máximo absoluto y $x=-1$ y $x=1$ son puntos de mínimo absoluto de $f(x)$.

3) Evaluar los siguientes límites.

i)

a) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{(\log x)^2}$,

b) $\lim_{x\to 0^+} x^3 \cdot \log(x)$.

Respuesta: a) aplicando el teorema de L'Hôpital obtenemos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{(\log x)^2} = (\frac{\infty}{\infty}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-1}{x^2}}{2\log x \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{2x^2\log x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{2x\log x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-1}{2x}}{\log x} = (\frac{\infty}{\infty}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{2x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2x} = \infty$$

b) Aplicando el teorema de L'Hôpital obtenemos

$$\lim_{x\to 0^+} x^3 \cdot \log(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x)}{\frac{1}{x^3}} = (\frac{-\infty}{\infty}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-3x^2}{x^6}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^6}{-3x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^3}{3} = 0$$

ii)
a) $\lim_{x\to 0^+} x^{2x}$,
b) $\lim_{x\to 0^+} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\arctan(x)})$.
Respuesta: a) primero aplicamos $a = e^{log(a)}$ obteniendo

$$\lim_{x\to 0^+} x^{2x} = \lim_{x\to 0^+} e^{log(x^{2x})} = \lim_{x\to 0^+} e^{2xlog(x)}.$$

Sabiendo que la función exponencial es continua, calculamos

$$\lim_{x\to 0^+} 2x \cdot \log(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x)}{\frac{1}{2x}} = (\frac{-\infty}{\infty}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{2x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -2x = 0$$

Entonces

$$\lim_{x\to 0^+} x^{2x} = e^0 = 1.$$

b)

$$\lim_{x\to 0^+} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\arctan(x)}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(x) - x}{x \cdot \arctan(x)} = (\frac{0}{0}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{\arctan(x) + x \cdot \frac{1}{1+x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{\arctan(x) \cdot (1 + x^2) + x} = (\frac{0}{0}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x}{\frac{1+x^2}{1+x^2} + (\arctan(x) \cdot 2x) + 1} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x}{2x \cdot \arctan(x) + 2} = \frac{0}{2} = 0$$

4) i) Usar el teorema de Taylor con $n = 2$ para obtener una aproximación de $\sqrt{1.2}$ y $\sqrt{2}$.
Respuesta:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad f''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}}$$

Ahora hallamos el polinomio de Taylor para $n = 2$ en el punto 1.

$$P_2(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2.$$

$$P_2(1.2) = 1 + \frac{1}{2}(1.2-1) - \frac{1}{8}(1.2-1)^2 = 1.098$$

$$P_2(2) = 1 + \frac{1}{2}(2-1) - \frac{1}{8}(2-1)^2 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{11}{8} = 1.375.$$

ii) Demostrar que la función $f(x) = x^3 - 2x - 5$ tiene una solución r en el intervalo $I = [2, 2.2]$. Si $x_1 = 2$ y si se define la sucesión $\{x_n\}$ utilizando el procedimiento de Newton, demostrar que $|x_{n+1} - r| \leq 0.7|x_n - r|^2$. Demostrar que x_4 es correcto con seis cifras decimales.

Respuesta:

$f(x) = x^3 - 2x - 5$ $f(2) = 8 - 4 - 5 = -1 < 0$ $f(2.2) = 10.648 - 4.4 - 5 = 1.248 > 0$. La función es continua y toma signo distinto en los extremos del intervalo, luego por el teorema del valor intermedio de Bolzano existe una raiz r en el intervalo $[2, 2.2]$.

Acotemos los valores de la primera y segunda derivada. $f'(x) = 3x^2 - 2$ entonces $|f'(x)| \geq |12-2| = 10 = m$ y $f''(x) = 6x$ luego $|f''(x)| \leq 13.2 = M$. Sea $K = \frac{M}{2m} = \frac{13.2}{20} = 0.66 < 0.7$. Ahora aplicamos la formula del método de Newton: $|x_{n+1} - r| \leq 0.7|x_n - r|^2$. En particular:

$$|x_4 - r| \leq K|x_3 - r|^2 \leq K^3|x_2 - r|^4 \leq K^7|x_1 - r|^8 \leq K^7 \cdot (0.2)^8 = 0.1396 \cdot 10^{-6} < 10^{-6}$$

5) i) Sea $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$ si $x \neq 1$ y $f(1) = 0$. Demostrar que f es integrable y calcular su integral.

Respuesta: Sea $\epsilon > 0$ y sea P_n la partición $P_n = (0, 1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, 2)$. Entonces,

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) = (1-1)(1 - \frac{1}{n} - 0) + (1-0)(1 + \frac{1}{n} - (1 - \frac{1}{n})) + (1-1)(2 - (1 + \frac{1}{n})) =$$

$= \frac{2}{n} < \epsilon$ si $n > \frac{2}{\epsilon}$. Por el criterio de Riemann, f es integrable en $[0, 2]$.

Calculemos el valor de dicha integral: para todo n, $U(f, P_n) = 2$, entonces el límite de las sumas superiores es igual a 2.

ii)

a) Demostrar que si $g(x) = 0$ para $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ y $g(x) = 1$ para $\frac{1}{2} < x \leq 1$, entonces se tiene $\int_0^1 g(x)dx = \frac{1}{2}$,

b) ¿ Se sostiene la conclusión si se cambia el valor de g en el punto $\frac{1}{2}$ a 7?.

Respuesta: a) sea $\epsilon > 0$ y sea $\{P_n\}$ la sucesión de particiones $P_n = (0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1)$. Entonces,

$$U(g,P_n) - L(g,P_n) = (0-0)(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) + (1-0)((\frac{1}{2} + \frac{1}{n}) - (\frac{1}{2} - \frac{1}{n})) + (1-1)(1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{n})) = \frac{2}{n} < \epsilon$$

si $n > \frac{2}{\epsilon}$. Por el criterio de Riemann, f es integrable en $[0,1]$.

Calculemos su integral: para todo n, $U(g,P_n) = \frac{2}{n} + (1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{n})) = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$, entonces el límite de las sumas superiores es igual a $\frac{1}{2}$.

b) Al definir $g(\frac{1}{2}) = 7$, se obtienen nuevas sumas superiores iguales a $\frac{1}{2} + \frac{13}{n}$, cuyo límite es siempre $\frac{1}{2}$.

6) i) Sea $I = [a,b]$ y sean f y g funciones acotadas de I a $\mathbb{R}$. Si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$, demostrar que $L(f) \leq L(g)$ y que $U(f) \leq U(g)$.

Respuesta: sea $P = (x_0, \cdots, x_n)$ una partición cualquiera de $[a,b]$. Se tiene que $M_j^f \leq M_j^g$ y $m_j^f \leq m_j^g$ $\forall 1 \leq j \leq n$. Luego tenemos

$$U(P,f) = \sum_{j=1}^{n} M_j^f \cdot (x_j - x_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{n} M_j^g \cdot (x_j - x_{j-1}) = U(P,g).$$

Por tanto se tiene que para toda partición P,

$$U(f) = inf\{U(Q,f) | Q \text{ partición de } [a,b]\} \leq U(P,g)$$

y que $U(f) \leq U(g) = inf\{U(P,g) | P \text{ partición de } [a,b]\}$.

Y también tenemos que

$$L(P,f) = \sum_{j=1}^{n} m_j^f \cdot (x_j - x_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{n} m_j^g \cdot (x_j - x_{j-1}) = L(P,g).$$

Por tanto se tiene que para toda partición P,

$$L(P,f) \leq sup\{L(Q,g) | Q \text{ partición de } [a,b]\} = L(g)$$

y que $L(f) = sup\{L(P,f) | P \text{ partición de } [a,b]\} \leq L(g)$.

ii) Supóngase que f es integrable en $[a,b]$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Si g se define por $g(y) = f(y-c)$ para todo $y \in [a+c, b+c]$, demostrar que g es integrable en el intervalo $[a+c, b+c]$ y que $\int_{a+c}^{b+c} g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Respuesta: sea $\epsilon > 0$ y $P_\epsilon = (x_0, \cdots, x_n)$ una partición de $[a,b]$ tal que $U(P_\epsilon, f) - L(P_\epsilon, f) < \epsilon$. Definimos la partición de $[a+c, b+c]$ de la forma $Q_\epsilon = (y_0 = x_0 + c, \cdots, y_n = x_n + c)$. Se tiene que:

$$U(g,Q_\epsilon)-L(g,Q_\epsilon) = \sum_{j=1}^{n}(M_j^g - m_j^g)\cdot(y_j - y_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n}(M_j^f - m_j^f)\cdot(x_j - x_{j-1}) < \epsilon$$

Luego g es integrable en $[a+c, b+c]$.

Sea ahora $P_n = (x_0, \cdots, x_n)$ sucesión de particiones de $[a,b]$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} U(f,P_n) - L(f,P_n) = 0,$$

entonces

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} M_j^f\cdot(x_j - x_{j-1}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} M_j^g\cdot(y_j - y_{j-1}) = \int_{a+c}^{b+c} g,$$

donde $Q_n = (y_0 = x_0 + c, \cdots, y_n = x_n + c)$ es una sucesión de particiones de $[a+c, b+c]$ tal que $\lim_{n\to\infty} U(g,Q_n) - L(g,Q_n) = 0$.

7) i) Encontrar F', cuando F está definida en $I = [0,1]$ de la siguiente manera:

a) $F(x) = \int_0^x sin(t^2)dt$, b) $F(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{1+t^3}dt$,

c) $F(x) = \int_{x^2}^x \sqrt{1+t^2}dt$, d) $F(x) = \int_0^{sin(x)} cos(t)dt$.

Respuesta: aplicamos el Teorema fundamental del calculo (2ª forma) y obtenemos que :

a) La función $\sin(t^2)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ luego $F'(x) = \sin(x^2)$.

b) La función $\frac{1}{1+t^3}$ es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$ y la función x^2 es siempre derivable. Entonces $F'(x) = \frac{1}{1+x^6} \cdot 2x$.

c) En el intervalo $[0,1]$ se tiene que $x^2 \leq x$, por tanto podemos expresar $F(x)$ de la siguiente forma:

$F(x) = \int_{x^2}^x \sqrt{1+t^2} = \int_{x^2}^a \sqrt{1+t^2} + \int_a^x \sqrt{1+t^2}$ donde $x^2 < a < x$. La función $\sqrt{1+t^2}$ es siempre continua, luego $F'(x) = -\sqrt{1+x^4}\cdot 2x + \sqrt{1+x^2}$.

d) La función $\cos x$ es continua y la función $\sin x$ es derivable en todo $\mathbb{R}$, luego $F'(x) = \cos(\sin(x)) \cdot \cos(x)$.

ii) Evaluar las siguientes integrales. Justificar cada paso.

$$a)\int_1^9 \frac{1}{2+\sqrt{t}}dt, \quad \text{y} \quad b)\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}dt.$$

Respuesta: a) aplicando el teorema de la primera sustitución haciendo $\sqrt{t} = x$ tenemos $\frac{1}{2\sqrt{t}}dt = dx$ y obtenemos:

$$\int_1^9 \frac{1}{2+\sqrt{t}} \cdot dt = \int_1^3 \frac{1}{2+x} \cdot 2x \cdot dx = 2\int_1^3 \frac{x+2-2}{2+x} \cdot dx = 2\int_1^3 (1 - \frac{2}{2+x}) =$$

$$= 2 \cdot (x - 2\log(2+x))]_1^3 = 2(3 - 2\log(5) - 1 + 2\log(3)) = 4(1 + \log(\frac{3}{5})).$$

b) Aplicando el teorema de la primera sustitución haciendo $\sqrt{t} = x$ $\frac{1}{2\sqrt{t}}dt = dx$ obtenemos:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}} dt = \int_0^1 \frac{x}{1+x} \cdot 2x dx = 2\int_0^1 \frac{x^2-1+1}{1+x} dx = 2\int_0^1 (x-1) + \frac{1}{x+1} dx =$$

$$= 2 \cdot (\frac{x^2}{2} - x + \log(x+1))]_0^1 = 2(\frac{1}{2} - 1 + \log(2) - \log(1)) = -1 + \log(4).$$

8) i) Si f es integrable en $[0,1]$, se puede demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n}) (\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x)dx.$$

Utilizar el resultado anterior para expresar los límites siguientes como una integral:

a) $\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k})$,

b) $\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2})$.

Respuesta:

a)

$$\lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}) = \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\frac{n}{n}) = \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{n}{n+k}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot (\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n+k}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}) = \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} \cdot \frac{n}{n}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot (\sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot n}{n^2 + k^2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot (\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{1 + (\frac{k}{n})^2}) = \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2} dx$$

ii) Establecer por qué las siguientes integrales son impropias y determinar si son convergentes o divergentes. Calcular el valor de las que sean convergentes.

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} dx \qquad b) \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

Respuesta:

a) Es impropia ya que el intervalo de integración no está acotado por la derecha ni por la izquierda y además la función no está acotada en dicho intervalo.

$$\int_c^d e^{-x} dx = -e^{-x}]_c^d = -e^{-d} + e^{-c}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{d\to\infty} \lim_{c\to-\infty} -e^{-d} + e^{-c} = 0 + \infty = \infty$$

Luego la integral impropia diverge.

b) Es impropia ya que el intervalo no está acotado por la derecha y además la función no está acotada en dicho intervalo.

$$\int_c^d \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{x}]_c^d = \frac{-1}{d} - \frac{-1}{c}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c\to 0^+} \lim_{d\to\infty} \frac{-1}{d} - \frac{-1}{c} = \infty$$

Luego la integral impropia diverge.

9) Calcular las siguientes integrales.

a) $\int x \cdot (\log(x))^2 \ dx$

Respuesta: Por partes tomando $g'(x) = x$ y $f(x) = (\log(x))^2$. Entonces

$$\int x \cdot (\log(x))^2 dx = \frac{x^2}{2} \cdot (\log(x))^2 - \int x^2 \cdot \log(x) \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \cdot (\log(x))^2 - \int x \cdot \log(x) dx =$$

(aplicando integración por partes de nuevo)

$$= \frac{x^2}{2} \cdot (\log(x))^2 - (\frac{x^2}{2} \log(x) - \int \frac{x^2}{2x} dx) = \frac{x^2}{2} \cdot (\log(x))^2 - \frac{x^2}{2} \cdot \log(x) + \frac{x^2}{4} + C.$$

b)$\int \sqrt{x} \cdot \log(x)\ dx$
Respuesta: Por partes tomando $g'(x) = \sqrt{x}$ y $f(x) = \log(x)$.

$$\int \sqrt{x} \cdot \log(x) dx = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \log(x) - \frac{2}{3} \int x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} \cdot \log(x) - \frac{2}{3} \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} \cdot \log(x) - \frac{4}{9} \sqrt{x^3} + C.$$

Capítulo 8

Soluciones de las hojas de problemas 2000-2001

BASES DE MATEMÁTICAS

Soluciones de la HOJA 1

2000-2001

---

1) Sean los conjuntos $A = \{3a : a \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{5a : a \in \mathbb{N}\}$.

i) Comprobar si $5 \in A$, $10 \in B$, $5 \in A \cap B$, $45 \in A \cap B$, $27 \in A \cup B$.

$5 \notin A$, ya que $5 = 3a$ implicaría que $5/3$ es un número natural.
$10 \in b$, ya que $10 = 5 \times 2$ y $2 \in \mathbb{N}$.
$5 \notin A \cap B$, ya que $5 \notin A$.
$45 \in A \cap B$, ya que $45 = 3 \times 15 = 5 \times 9$ y $15, 9 \in \mathbb{N}$.
$27 \in A \cup B$, ya que $27 = 3 \times 9 \in A$ y $9 \in \mathbb{N}$.

ii) Demostrar que A y B son subconjuntos de $\mathbb{N}$.

$A \subset \mathbb{N}$ ya que cada $x \in A$ es de la forma $3 \times a$ con $a \in \mathbb{N}$, por tanto, x es un producto de números naturales, entonces $x \in \mathbb{N}$.
El mismo razonamiento se aplica a B porque $5 \in \mathbb{N}$.

iii) Describir el conjunto $A \cap B$.

$$A \cap B = \{15a : a \in \mathbb{N}\}$$

En efecto, probamos el doble contenido:

$A \cap B \subset \{15a : a \in \mathbb{N}\}$ ya que si $x = 3a = 5b$, con a y b números naturales, entonces 3 divide a b (3 y 5 son números primos), es decir, $b = 3c$ con $c \in \mathbb{N}$ y por tanto $x = 15c$ con $c \in \mathbb{N}$ como queríamos demostrar.

$\{15a : a \in \mathbb{N}\} \subset A \cap B$ porque si $x = 15a$ entonces $x = 3 \times (5a) = 5 \times (3a)$ y por tanto $x \in A$ y $x \in B$.

2) Sea C el subconjunto de los números enteros no negativos menores o iguales que 57 y D el conjunto de los números enteros mayores o iguales que -17. Determinar:

i) Si C es un conjunto finito y si lo es, calcular su cardinal.

Sea $C = \{n \in \mathbb{Z} : 0 \leq n \leq 57\}$ podemos definir la función $f : \mathbb{N}_{58} \to C$ definida por $f(n) = n - 1$, que es biyectiva. En efecto, f es inyectiva porque $n - 1 = m - 1$ implica $m = n$. Y f es sobreyectiva porque dado $n \in C$ se verifica que $n + 1 \in \mathbb{N}_{58}$ y $f(n + 1) = n + 1 - 1 = n$. Por tanto C es finito y $card(C) = 58$.

ii) Si D es un conjunto finito y si lo es, calcular su cardinal.

Sea $D = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq -17\}$, como $\mathbb{N} \subset D$ se tiene que D no es finito.

iii) El conjunto $C \cap D$ y el conjunto $C \cup D$.

Observamos que $C \subset D$ ya que si $0 \leq n \leq 57$ entonces, en particular $n \geq -17$.

Por definición de intersección $C \cap D \subset C$. Además en este caso $C \subset D$ por lo que $C \subset C \cap D$. Finalmente $C = C \cap D$.

Por definición de unión $D \subset C \cup D$. Además en este caso $C \subset D$ por lo que $C \cup D \subset D$. Finalmente $D = C \cup D$.

3) Toma el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

i) Encontrar tres conjuntos A_1, A_2 y A_3 disjuntos y tales que su unión sea todo $\mathbb{R}$.

Sean $A_1 = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $A_2 = \{0\}$ y $A_3 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Entonces $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = A_3 \cup (\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \cup \{0\} = A_3 \cup A_2 \cup A_1$ y A_1, A_2 y A_3 son disjuntos.

ii) Idem que i) pero imponiendo que A_1 y A_2 sean finitos o numerables.

Como $A_1 \subset \mathbb{Q}$ es numerable y A_2 es finito tenemos el resultado.

iii) Encontrar dos conjuntos infinitos B_1 y B_2 tales que su unión sea $\mathbb{R}$ y su intersección sea numerable pero no finita.

Tomamos $B_1 = \mathbb{R}$ y $B_2 = \mathbb{N}$. Entonces $B_1 \cup B_2 = \mathbb{R}$ y $B_1 \cap B_2 = \mathbb{N}$ que es numerable.

4) Estudiar las propiedades de las siguientes relaciones, comprobando si son o no relaciones de orden o de equivalencia.

i) En el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ la relación

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a)\}.$$

R es reflexiva ya que $(a, a), (b, b), (c, c), (d, d) \in R$.

R es simétrica. Si $(x, y) \in R$ entonces $x = y$ o $x = a$ e $y = b$ o $x = b$ e $y = a$. Esto indica que para cada $(x, y) \in R$ se tiene $(y, x) \in R$.

R no es antisimétrica porque $(a, b), (b, a) \in R$ y $a \neq b$.

R es transitiva. Los únicos casos en que ocurre la hipótesis de la transitividad $((x, y), (y, z) \in R)$ son:

o $x = y$ donde la transitividad es automática (la tesis es una de las hipótesis);

o $y = z$ donde la transitividad es automática (la tesis es una de las hipótesis);

o $x = a, y = b, z = a$, esto es, $(a, b), (b, a) \in R$ entonces hay que comprobar $(a, a) \in R$ que es cierto;

o $x = b, y = a, z = b$, esto es, $(b, a), (a, b) \in R$ entonces hay que comprobar $(b, b) \in R$ que es cierto.

Por tanto R es una relación de quivalencia (y no es una relación de orden).

ii) En el conjunto de los número naturales aRb si y solamente si $a - b$ no es natural.

R es reflexiva porque para cada $a \in \mathbb{N}$ se tiene aRa ya que $a - a = 0 \notin \mathbb{N}$.

R no es simétrica. Por ejemplo $1R3$ ya que $1 - 3 = -2 \notin \mathbb{N}$ pero $3 - 1 = 2 \in \mathbb{N}$ con lo que 3 no se relaciona con 1.

R es antisimétrica ya que si aRb y bRa entonces $a - b \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ y $b - a = -(a - b) \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ con lo que $a - b = 0$, esto es, $a = b$.

R es transitiva. Sean $a, b, c \in \mathbb{N}$. Si aRb y bRc entonces $a - b \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ y $b - c \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$. Entonces sumando $(a - b) + (b - c) = a - c \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ con lo que aRc.

De esta manera R es relación de orden (y no de equivalencia).

iii) En el conjunto de los puntos del plano, dos puntos se relacionan si hay una circunferencia con centro en el origen de coordenadas que pasa por ambos.

R es reflexiva porque para cada a punto del plano hay una circunferencia centrada en el origen que pasa por a (también si a es el origen, la circunferencia de radio 0).

R es simétrica porque dados dos puntos del plano a y b tales que aRb entonces hay una circunferencia que pasa por a y b, por tanto bRa.

R no es antisimétrica porque $(-1, 0)R(1, 0)$ (tomando la circunferencia de radio 1) y $(1, 0)R(-1, 0)$ (siendo $(1, 0) \neq (-1, 0)$).

R es transitiva ya que si interpretamos la relación diciendo que dos puntos del plano están relacionados si y solamente si tienen la misma distancia al origen, entonces aRb y bRc implica que $d(a,0) = d(b,0) = d(c,0)$ (0 denota el origen de coordenadas).

Se sigue que R es una relación de equivalencia.

5) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por la expresión $f(a) = 3a + 1$. Comprobar si es inyectiva o sobreyectiva y determinar el conjunto imagen.

Idem con la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = sen(x)$.

Sean $a, b \in \mathbb{N}$.

f es inyectiva porque si $f(a) = f(b)$ entonces $3a+1 = 3b+1$ y por tanto $a = b$.

f no es sobreyectiva porque $3 \in \mathbb{N}$ pero $3 \notin Im(f)$. En caso contrario existiría $a \in \mathbb{N}$ tal que $3a + 1 = 3$, pero $2/3 \notin \mathbb{N}$.

El conjunto imagen es por tanto $Im(f) = \{3a + 1 : a \in \mathbb{N}\}$.

La función g no es inyectiva porque $sen(0) = sen(\pi) = 0$ $(0 \neq \pi)$.

La función g no es sobreyectiva porque $|sen(x)| \leq 1$ y por ejemplo el $2 \in \mathbb{R}$ no está en la imagen.

El conjunto imagen es $Im(g) = [-1, 1]$.

6) Sea R la relación en $\mathbb{R}$ definida por, para cada $a, b \in \mathbb{R}$, aRb si b es solución de la ecuación $ax^2+5x+3 = 0$. Indicar por qué R no es una función.

Si $a = 0$, la ecuación $ax^2 + 5x + 3 = 0$ tiene solución $x = -3/5$.

Si $a \neq 0$ la misma ecuación tiene por soluciones:

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{25 - 12a}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-5 - \sqrt{25 - 12a}}{2a}$$

Si $25 - 12a < 0$, estas soluciones son números complejos, entonces el dominio de R no es $\mathbb{R}$. Por ejemplo $a = 3 \notin dom(R)$.

Si tomamos como dominio el conjunto $A = \{a \in \mathbb{R} : 25 - 12a \geq 0\} = (-\infty, 25/12]$, tampoco se tiene una función ya que si $a \neq 25/12$ existen dos soluciones.

Explicar qué ocurre si la ecuación es $x + 5a = 0$ o $ax + 5 = 0$.

En el caso primero a cada $a \in \mathbb{R}$ le queda asociado un único número real $x = -5a$ y por tanto R es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

En el caso segundo r no puede ser una función pues no estará definida si $a = 0$. Si $a \neq 0$ entonces $x = -5/a$ queda unívocamente determinado y $R : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ es una función.

7) Calcular si existen el máximo y el mínimo de los siguientes conjuntos de números con el orden usual $\leq$.

i) $A = \{x \in \mathbb{N} : 0 \leq x \leq 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

1 es un mínimo porque $1 \in A$ y para cada $x \in A$ $x \geq 1$. 7 es un máximo porque $7 \in A$ y para cada $x \in A$ $x \leq 7$.

ii) $B = \{3/n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$.

B no tiene mínimo ya que $inf(B) = 0$ y $0 \notin B$. Comprobemos que 0 es el ínfimo: $0 \leq b$ para cada $b \in B$ y si $x > 0$ entonces $\frac{x}{3} > 0$ y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < \frac{x}{3}$. Se sigue que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{3}{n} < x$ y $3/n \in B$.
3 es el máximo de B ya que $3 \in B$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica $\frac{3}{n} \leq 3$.

iii) $C = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 54\} = [54, \infty)$.

C no tiene máximo ya que no está acotado superiormente.
54 es el mínimo de C ya que $54 \in C$ y para cada $x \in C$ se verifica $x \geq 54$.

iv) $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 64\} = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 8\} = [-8, 8]$.

8 es el máximo y -8 es el mínimo de D.
v) $C \cap D = [54, \infty) \cup [-8, 8] = \emptyset$.

8) Sean f y g las funciones reales
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x^2 + 6$ y
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 2x$.
Hallar $f \circ g$ y $g \circ f$.

$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = 3(2x)^2 + 6 = 12x^2 + 6$.
$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2 + 6) = 6x^2 + 12$.

9) Determinar y representar gráficamente el subconjunto del plano real $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq |y|\}$.

Si $y \geq 0$ (semiplano superior) las soluciones de $|x| \leq y$ son los puntos (x, y) tales que $-y \leq x \leq y$ es decir la región comprendida en el semiplano superior entre la recta $y = x$ (bisectriz del primer cuadrante) e $y = -x$ (bisectriz del segundo cuadrante).

Si $y < 0$, las soluciones de $|x| \leq -y$ resultan ser los puntos (x, y) tales que $y \leq x \leq -y$ (esto es, la región simétrica con respecto al eje x de la del párrafo anterior).

La solución A es la unión de ambas regiones.

BASES DE MATEMÁTICAS

Soluciones de la HOJA 2

2000-2001

---

1) Sea f_n la sucesión de Fibonacci: $f_1 = 1,\ f_2 = 1$ y $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ si $n \geq 3$.

i) Escribir los diez primeros términos de la sucesión definida por $a_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$ para $n \geq 1$.

Los 10 primeros términos se van calculando evaluando:

$$a_1 = 1, a_2 = f_3/f_2 = 2, a_3 = 3/2, a_4 = 5/3, a_5 = 8/5$$

$$a_6 = 13/8, a_7 = 21/13, a_8 = 34/21, a_9 = 55/34, a_{10} = 89/55.$$

ii) Usando la definición del apartado i), probar que $a_1 = 1$ y $a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$ para $n \geq 2$.

En efecto $a_1 = 1$. También se verifica que $a_2 = 2 = 1 + 1 = 1 + 1/a_1$. Según la fórmula, si $n \geq 3$ se tiene:

$$a_n = \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{f_n}{f_{n+1}} = 1 + \frac{1}{a_n}.$$

iii) Asumiendo que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sea convergente, la **razón áurea r** se define como $r = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Verificar que $r = 1 + \frac{1}{r}$ y resolver esta ecuación.

Observamos primero que como $a_n = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n} \geq 1$ para cada $n \geq 3$ entonces

$$r = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

debe ser mayor o igual que 1.

Entonces de la igualdad $a_{n+1} = 1 + 1/a_n$ se deduce que $r = 1 + 1/r$ y por tanto que $r^2 - r - 1 = 0$. Resolviendo esta ecuación de segundo grado se obtienen las dos soluciones:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Por la desigualdad $r \geq 1$ de la observación del párrafo anterior se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

iv) Explicar por qué el apartado iii) implica que la sucesión de Fibonacci es propiamente divergente.

Sencillamente es una aplicación del criterio del cociente ya que $\lim_{n\to\infty} f_n/f_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n > 1$.

2) Dar un ejemplo de sucesión que satisfaga la condición propuesta o justificar por qué no existe tal sucesión. (Hay más de una respuesta correcta.)

a) Una sucesión monótona creciente que converge a 10.

Por ejemplo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{10 - 1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Una sucesión monótona acotada que no es convergente.

Imposible porque toda sucesión monótona acotada es convergente.

c) Una sucesión que converge a $\frac{3}{4}$.

Por ejemplo la sucesión constante $\{3/4\}_{n\in\mathbb{N}}$.

d) Una sucesión no acotada que converge a 100.

Imposible porque toda sucesión convergente está acotada.

3) Sea $\{\frac{n^2}{n!}\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $0! = 1! = 1$ y $n! = n\,(n-1)\,(n-2)\,\cdots 3\cdot 2\cdot 1$, si $n \geq 2$.

Verificar que $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!} = 0$.

Es una aplicación del criterio del cociente ya que, llamando a_n al término general de la sucesión se tiene:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!}\frac{n!}{n^2} = \frac{n+1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Y por tanto $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 0$ con lo que la sucesión $\{\frac{n^2}{n!}\}$ converge a 0.

4) Hallar, si existen, los siguientes límites:

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$.

Como $(n+2)! = (n+2)(n+1)n!$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+2)(n+1)}.$$

Y se tiene que converge a 0, por ejemplo por el criterio del encaje:

$$0 \leq \frac{1}{n^2+3n+1} \leq \frac{1}{n}.$$

ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Podemos usar el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!} = \lim_{n\to\infty} (\frac{n}{n+1})^n.$$

Para calcular este último límite:

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{n}{n+1})^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{((n+1)/n)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^n} = 1/e < 1.$$

Por tanto por el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

iii) $\lim_{n\to\infty} a_n$, donde $a_1 > 0$ y $a_n = 1/(n\, e^{a_{n-1}})$.

Se observa que todos los términos de la sucesión son positivos por lo que $e^{a_{n-1}} > 1$. Entonces por el criterio del sandwich:

$$0 < a_n = \frac{1}{ne^{a_{n-1}}} < 1/n,$$

se concluye que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.

5) Se inscribe un polígono regular de n lados en una circunferencia de radio R.

i) verificar que el perímetro P del polígono viene dado por la fórmula $P(n) = 2\,n\,R\,sen(\frac{a}{2})$, donde $a = \frac{2\pi}{n}$,

como el polígono es regular y tiene n lados, el triángulo formado por un lado y los dos radios que parten desde los extremos de dicho lado es un triángulo isósceles cuyo ángulo comprendido entre los dos radios mide $2\pi/n$ radianes. Llamamos l a la longitud del lado. Trazando la perpendicular desde el centro de la circunferencia al lado elegido, se forma un triángulo rectángulo de manera que $l/2 = Rsen(a/2)$. Por tanto como hay n lados el perímetro verifica la fórmula de arriba.

ii) utilizar la fórmula anterior y el hecho de que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{sen(\frac{c}{n})}{\frac{c}{n}} = 1$ (donde c es una constante), para probar que una circunferencia de radio R tiene longitud $2\,\pi\,R$,

basta observar que la longitud de la circunferencia es el límite cuando n tiende a infinito de $P(n)$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} P(n) = 2\pi R \lim_{n\to\infty} \frac{sen(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi R.$$

iii) modificar el razonamiento de los dos apartados anteriores para deducir que el área de un disco de radio R es $\pi\,R^2$.

La altura de los triángulos isosceles antes señalados es $Rcos(a/2)$. Entonces calculando el área de cada triángulo y sumando dichas áreas se obtiene:

$$A(n) = \frac{n2R^2 sen(a/2)cos(a/2)}{2}.$$

Usando la fórmula del seno del ángulo doble se obtiene:

$$A(n) = \frac{\pi R^2 sen(2\pi/n)}{(2\pi/n)}.$$

Cuyo límite es exactamente πR^2.

6) i) Hallar, si existe, $\lim_{n\to\infty} (\frac{n+3}{n+2})^n$,

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{n+3}{n+2})^n, = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+3/n)^n}{(1+2/n)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{((1+3/n)^{n/3})^3}{((1+2/n)^{n/2})^2} = \frac{e^3}{e^2} = e$$

.

ii) calcular la relación entre a y b para que

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{n+a}{n+1})^{3n+a} = \lim_{n\to\infty} (\frac{n+3}{n+2})^{bn}$$

Calculamos el primer límite:
si $a = 0$, $\lim_{n\to\infty} (\frac{n+a}{n+1})^{3n+a} = \lim_{n\to\infty} (\frac{n}{n+1})^{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^{3n}} = e^{-3}$.
si $a \neq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{n+a}{n+1})^{3n+a} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+a/n)^{3n}}{(1+1/n)^{3n}} \frac{(1+a/n)^a}{(1+1/n)^a} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{((1+a/n)^{n/a})^{3a}}{((1+1/n)^n)^3} \frac{(1+a/n)^a}{(1+1/n)^a} = \frac{e^{3a}}{e^3} = e^{3a-3}.$$

Aplicamos el apartado i) para calcular el segundo límite y entonces:

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{n+3}{n+2})^{bn} = e^b.$$

Por tanto los límites son iguales si y sólo si $b = 3a - 3$.

7) Sea a_n el número de instrucciones de un determinado algoritmo para su ejecución sobre n datos de entrada. Se sabe que dicho algoritmo actúa de la siguiente manera:

- con un solo dato de entrada resuelve el problema usando una instrucción,

- con n datos de entrada usa $4n$ instrucciones para reducir el problema a $n-1$ datos y se ejecuta sobre ellos el mismo algoritmo.

Se pide
i) definir la sucesión recurrente $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,

$$a_1 = 1$$
$$a_n = 4n + a_{n-1}$$

ii) estudiar la monotonía y acotación de la misma,

observamos que los términos de la sucesión son todos positivos. Por la definición de a_n se tiene que $a_n = 4n + a_{n-1} > a_{n-1}$, por lo que es estrictamente creciente.

Por la propiedad de Arquímedes, para cada $C > 0$ existe n_0 tal que $4n > C$ si $n > n_0$. Por tanto la sucesión es creciente y no está acotada superiormente, de modo que es propiamente divergente a infinito.

iii) verificar por inducción que $|a_n - 2\,n^2| < 2\,n$ para todo n,

Para $n = 1$ $\quad |a_1 - 2| = 1 < 2$, con lo que se verifica.
Sea a_n verificando la desigualdad $|a_n - 2n^2| < 2n$, entonces:

$$|a_{n+1} - 2(n+1)^2| = |4n + a_n - 2(n^2 + 2n + 1)| =$$

$$|4n + a_n - 2n^2 - 4n - 2| \leq |a_n - 2n^2| + |-2| < 2(n+1).$$

Con lo que se tiene la desigualdad para cada n natural.

iv) deducir que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{2\,n^2} = 1$.

Como hemos demostrado que $|a_n - 2n^2| < 2n$ se sigue que $\frac{|a_n - 2n^2|}{2n^2} < \frac{2n}{2n^2}$. Y entonces el criterio del Sandwich aplicado a:

$$0 \leq |\frac{a_n}{2n^2} - 1| < 1/n$$

muestra que $\{\frac{a_n}{2n^2} - 1\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a 0. Por tanto la sucesión $\{\frac{a_n}{2n^2}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 1.

8) Estudiar la convergencia de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = (1+\frac{1}{n})+(-1)^n(1-\frac{3}{n})$. Sugerencia: considerar las subsucesiones $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{a_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

La sucesión es divergente ya que:

la subsucesión de los términos pares tiene por término general

$$a_{2n} = (1 + 1/2n) + (1 - 3/2n) = 2 - 1/n,$$

que por tanto converge a 2.

La subsucesión de los términos impares tiene por término general

$$a_{2n} = (1 + 1/(2n-1)) - (1 - 3/(2n-1)) = 4/(2n-1),$$

que por tanto converge a 0.

9) Sean a_0 y b_0 números reales positivos tales que $a_0 < b_0$. A partir de ellos se construyen las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de modo que

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{b_0}) \qquad \text{y} \qquad b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2},$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{2}(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}) \qquad \text{y} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Verificar que para todo n, $a_{n+1} < b_{n+1}$ y estudiar la convergencia de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Nota: a_{n+1} es la media armónica de a_n y b_n y b_{n+1} es la media aritmética de a_n y b_n.

Comenzamos por demostrar por inducción que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $a_{n+1} < b_{n+1}$.

En el caso $n = 1$ se tiene

$$b_2 - a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} - \frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1})} = \frac{a_1 + b_1}{2} - \frac{2}{\frac{a_1+b_1}{a_1b_1}} =$$

$$= \frac{a_1 + b_1}{2} - \frac{2a_1b_1}{a_1 + b_1} = \frac{(a_1 + b_1)^2 - 4a_1b_1}{2(a_1 + b_1)} =$$

$$= \frac{(a_1 - b_1)^2}{2(a_1 + b_1)}$$

Como todos los términos a_n y b_n son positivos (ya que a_0 y b_0 lo son) tanto el numerador como el denominador de la fracción de arriba son positivos, salvo que $a_1 = b_1$. Si comprobamos que $a_1 \neq b_1$ entonces $b_2 > a_2$.

En efecto $b_1 - a_1 = \frac{(a_0-b_0)^2}{2(a_0+b_0)} > 0$. Por tanto se tiene la base de la inducción.

Por hipótesis de inducción $b_{n+1} > a_{n+1}$ y hay que comprobar que $b_{n+2} > a_{n+2}$. Pero los mismos razonamientos de antes dan:

$$b_{n+2} - a_{n+2} = \frac{(a_{n+1} - b_{b+1})^2}{2(a_{n+1} + b_{n+1})} > 0.$$

Con lo que se tiene la desigualdad para todo n natural.

La sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es entonces creciente porque:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} - a_n = \frac{2a_nb_n - a_n^2 - a_nb_n}{a_n + b_n} = \frac{a_n(b_n - a_n)}{a_n + b_n} > 0.$$

La sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es entonces decreciente porque:

$$b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} < 0.$$

Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene la cadena de desigualdades:

$$a_0 < a_n < b_n < b_0.$$

Y como tanto la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como la sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son monótonas y acotadas, se tiene que son convergentes.

10) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_1 = 1$, y $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 3$ para $n \geq 2$. Demostrar que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es contractiva y calcular su límite.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| = |\frac{a_{n+1}}{2} + 3 - \frac{a_n}{2} - 3| = \frac{1}{2}|a_{n+1} - a_n|.$$

De modo que es contractiva con constante $c = 1/2$.
Para calcular el límite basta resolver la ecuación:

$$L = 3 + L/2.$$

Esto es $L = 6$.

BASES DE MATEMÁTICAS

Soluciones de la HOJA 3

2000-2001

---

1) Estudia los siguientes límites:

$$i)\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4},\qquad ii)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{2tan(x)},\qquad iii)\ \lim_{x\to 0}\frac{tan(x)-sen(x)}{x^2},$$

$iv)$ calcula a para que $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x-a})^x = 4,$

$v)$ utiliza el criterio basado en sucesiones para calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)-ln(1-x)}{x}.$$

i) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-3)}{(x+2)} = -1/4.$

ii)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{2tan(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{cos(x)(1-cos(x))}{2sen(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{cos(x)(\frac{1-cos(x)}{x})}{\frac{2sen(x)}{x}} = 0.$$

iii) $\lim_{x\to 0}\frac{tan(x)-sen(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{sen(x)(1-cos(x))}{x^2cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}\frac{1-cos(x)}{x}\frac{1}{cos(x)} = 0.$

iv) calcula a para que $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x-a})^x = 4$

Manipulamos la expresión para que tenga la forma de los límites relacionados con el número e:

$$(\frac{x+a}{x-a})^x = (1+\frac{2a}{x-a})^x = (1+\frac{1}{\frac{x-a}{2a}})^x =$$

$$= ((1+\frac{1}{\frac{x-a}{2a}})^{\frac{x-a}{2a}})^{2a}(1+\frac{1}{\frac{x-a}{2a}})^a.$$

Por tanto el límite que buscamos es e^{2a} y $a = ln(2)$.

Alternativamente también se podría dividir el numerador y el numerador por x.

v) utiliza el criterio basado en sucesiones para calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x) - ln(1-x)}{x}.$$

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales de modo que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $x_n \neq 0$ y que converge a 0.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ln(1+x_n) - ln(1-x_n)}{x_n} = \lim_{n\to\infty} ln(\frac{1+x_n}{1-x_n})^{\frac{1}{x_n}} =$$

$$= ln(\lim_{n\to\infty} \frac{(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}}{(1-x_n)^{\frac{1}{x_n}}}) = ln(\frac{e}{e^{-1}}) = 2.$$

Donde la penúltima igualdad es la definición general de e (pág. 73 de los apuntes).

2) Halla dos funciones f y g tales que

i) existe $\lim_{x\to a} f(x)\, g(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ pero no existe $\lim_{x\to a} f(x)$.

Sea $f(x) = 1/x$ y $g(x) = x^2$ de modo que, tomando $a = 0$ se tiene que no existe $\lim_{x\to 0} f(x)$, que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, y que $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$.

ii) existe $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ pero no existen ni $\lim_{x\to 0} f(x)$ ni $\lim_{x\to 0} g(x)$.

Basta tomar $f(x) = 1/x = g(x)$.

3) Halla las constantes a y b para que f sea continua para todo $x \in \mathbb{R}$:

i) $f(x) = \begin{cases} ax+3 & \text{si} \quad x < 1, \\ 2 & \text{si} \quad x = 1, \\ x^2 + b & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$

Como $f(x)$ es una función polinomial y por tanto continua si $x \neq 1$ entonces basta estudiar este punto, teniendo la seguridad de la continuidad en todos los puntos distintos de 1.

Para que sea continua se debe cumplir que:

$$1 + b = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 2 = \lim_{x\to 1^-} f(x) = a + 3.$$

Por tanto $a = -1$ y $b = 1$.

ii) $f(x) = \begin{cases} \frac{sen(ax)}{x} & \text{si} \quad x < 0, \\ 5 & \text{si} \quad x = 0, \\ x + b & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$

Como la función $f(x)$ viene definida por un cociente de funciones continuas si $x < 0$ y por un polinomio si $x > 0$, se tiene continuidad en todos los puntos distintos del 0. Estudiemos este punto.

Si $a = 0$ entonces $f(x) = 0$ si $x < 0$ y por tanto no puede ser continua en 0 puesto que $f(0) = 5$.

Si $a \neq 0$, para que la función sea continua en 0 el límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{sen(ax)}{ax} a = a$$

debe ser igual al límite por la derecha:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = b$$

e igual a 5.

Por tanto $a = b = 5$.

4) Sea

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ -x & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Verifica que f es continua sólo en $x = 0$.

Sea x_0 un número real arbitrario y dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ convergentes a x_0 de modo que $x_n \in \mathbb{Q}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $y_n \notin \mathbb{Q}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (que existen por la densidad de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$). De este modo:

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = x_0,$$

$$\lim_{n \to +\infty} f(y_n) = -x_0.$$

En el único punto en el que estos dos límites coinciden es en el punto $x_0 = 0$. Por tanto $f(x)$ sólo puede ser continua en $x_0 = 0$.

Veamos que en efecto es continua en 0. Sea $\{a_n\}$ una sucesión convergente a 0. Entonces $|f(a_n)| = |a_n|$ y por tanto la sucesión $\{|f(a_n)|\}$ converge a 0 lo que impliica que la sucesión $\{f(a_n)\}$ converge a 0. Por tanto se tiene la continuidad en 0.

5) La ecuación $x^3 - x^2 - 1 = 0$ tiene una raíz real. Utiliza el método de la bisección para aproximarla con un error menor que $\frac{1}{16}$.

Sea $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ que es una función continua en $\mathbb{R}$. Se tiene que $f(1) = -1 < 0$ y $f(2) > 0$ por lo que, por el teorema de Bolzano, la función tiene una raíz en el intervalo $(1, 2)$. Entonces 1 aproxima la raíz con un error menor de una unidad.

Tomamos ahora el punto medio del intervalo que es $3/2$. Como $f(3/2) > 0$ entonces la función tiene una raíz en el intervalo $(1, 3/2)$. Entonces 1 aproxima la raíz con un error menor que $1/2$.

Tomamos ahora el punto medio del intervalo que es $5/4$. Como $f(5/4) < 0$ entonces la función tiene una raíz en el intervalo $(5/4, 3/2)$. Entonces $5/4$ aproxima la raíz con un error menor que $1/4$.

Tomamos ahora el punto medio del intervalo que es $11/8$. Como $f(11/8) < 0$ entonces la función tiene una raíz en el intervalo $(11/8, 3/2)$. Entonces $11/8$ aproxima la raíz con un error menor que $1/8$.

Tomamos ahora el punto medio del intervalo que es $23/16$. Como $f(23/16) < 0$ entonces la función tiene una raíz en el intervalo $(23/16, 3/2)$. Entonces $23/16$ aproxima la raíz con un error menor que $1/16$.

6) Verifica que la ecuación $x + sen(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+3}$ tiene al menos una solución en el intervalo $[0, \pi]$.

Sea la función $f(x) = x + sen(x) - \frac{1}{\sqrt{x}+3}$ que es una función continua en $[0, \pi]$. Como $f(0) = -1/3 < 0$ y $f(\pi) = \pi - \frac{1}{\sqrt{\pi}+3} > 0$ se tiene que hay una raíz de f (y por tanto una solución de la ecuación del enunciado del problema) en el intervalo $[0, \pi]$.

7) Usando el teorema del valor intermedio, explica por qué las agujas del reloj se superponen al menos una vez por hora.

Sea t una variable que representa el tiempo en el intervalo de una hora $t \in [k, k+1]$, donde k es un número de 0 a 11. La posición de la aguja de las horas viene dada por

$$h(t) = \frac{2\pi}{12} t.$$

La posición de la aguja de los minutos viene dada por

$$m(t) = 2\pi(t - k).$$

Por tanto la función $l(t) = m(t) - h(t)$ es una función continua de modo que $l(k) = m(k) - h(k) = -h(k) < 0$ salvo si $k = 0$ donde el problema está resuelto porque a las 00 horas 00 minutos las agujas están superpuestas. Y $l(k+1) = 2\pi - \frac{2\pi}{12}(k+1) > 0$ salvo si $k = 11$ donde el problema está de nuevo resuelto a las 00 horas 00 minutos. Entonces, por el teorema de Bolzano, existe un valor $c \in (k, k+1)$ de modo que $l(c) = 0$ es decir que las agujas están superpuestas.

8) Un sábado a las 8:00 de la mañana, un hombre comienza a subir corriendo la ladera de una montaña hacia su camping de fin de semana. El domingo a las 8:00 de la mañana baja corriendo la montaña. Tarda 20 minutos en subir y sólo 10 en bajar. En cierto punto del camino de bajada, el hombre se da cuenta que pasó por el mismo lugar a la misma hora al sábado. Probar que el hombre está en lo cierto. (Aplicar el teorema del valor intermedio a la función $f(t) = s(t) - r(t)$, siendo $s(t)$ y $r(t)$ las funciones de posición de subida y bajada.)

Se tiene la función f que es una función continua y

$$f(0) = s(0) - r(0) = -r(0) < 0 \qquad f(10) = s(10) - 0 = s(10) > 0.$$

Por tanto el teorema de Bolzano demuestra el enunciado del problema.

BASES DE MATEMÁTICAS

Soluciones de la HOJA 4
(primera parte)

2000-2001

---

1) Calcula la derivada de la función $f(x)$:

$$i) \quad f(x) = ln(\frac{2tg(x)+1}{tg(x)+2}), \qquad ii)\, f(x) = 5^{cosec(x)},$$
$$iii) \quad \text{si} \quad sen(x+f(x)) = f^2(x)cos(x),$$
$$iv) \quad \text{si} \quad x = f(x)^2\sqrt{1-f(x)}, \qquad v) \quad arctg(\frac{sen(x)}{1+cos(x)}).$$

i) $f'(x) = (\frac{2tg(x)+1}{tg(x)+2})^{-1}(\frac{2tg(x)+1}{tg(x)+2})' = \frac{tg(x)+2}{2tg(x)+1} \cdot \frac{\frac{2(tg(x)+2)}{cos^2(x)} - \frac{(2tg(x)+1)}{cos^2(x)}}{(tg(x)+2)^2} =$

$$\frac{3}{cos^2(x)(2tg(x)+1)(tg(x)+2)}.$$

ii) $f'(x) = -5^{cosec(x)}ln(5)cosec(x)cotg(x)$.

iii) Derivando ambos miembros de la igualdad

$$sen(x+f(x))' = (f^2(x)cos(x))'.$$

Entonces se tiene:

$$cos(x+f(x))(1+f'(x)) = 2f(x)f'(x)cos(x) - f^2(x)sen(x).$$

Por tanto sólo queda despejar $f'(x)$.

$$f'(x) = -\frac{f^2(x)sen(x)+cos(x+f(x))}{cos(x+f(x))-2f(x)cos(x)}.$$

iv) De nuevo como en el ejercicio anterior:

$$1 = 2f(x)f'(x)\sqrt{1-f(x)} - \frac{f'(x)f^2(x)}{2\sqrt{1-f(x)}}.$$

Y despejando $f'(x)$ se obtiene:

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{1-f(x)}}{4f(x)-5f^2(x)}.$$

v) Usando la derivada de la función arcotangente:

$$f'(x) = \frac{1}{1+\frac{sen^2(x)}{(1+cos(x))^2}} \cdot \frac{cos(x)(1+cos(x))+sen^2(x)}{(1+cos(x))^2}$$

Despejando la expresión se obtiene $f'(x) = 1/2$.

2) i) ¿Es derivable la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2\, sen(\frac{1}{x}) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

en $x = 0$?

Debemos ver si existe el límite cuando x tiende a 0 de

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2 sen(1/x)}{x} = xsen(1/x).$$

Por la regla del sandwich:

$$-x \leq xsen(1/x) \leq x$$

dicho límite existe y es 0 por tanto f es derivable en 0 y $f'(0) = 0$.

ii) Determinar el ángulo que forman las curvas $y = x^2 - 1,\ y = x^3 - x$ en los puntos de corte.

Nota: El ángulo que forman dos curvas es el ángulo que forman sus tangentes.

Sean $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = x^3 - x$.

Se comienza calculando los puntos de corte de las curvas, que son las soluciones de la ecuación $f(x) = g(x)$, esto es, $x^2 - 1 = x^3 - x$ que son los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. Para calcular los ángulos necesitamos las pendientes de las rectas tangentes en dichos puntos:

$$f'(1) = 2 \qquad f'(-1) = -2$$

$$g'(1) = 2 \qquad g'(-1) = 2.$$

Por tanto en el punto $(1, 0)$ las pendientes de las rectas tangentes coinciden, luego son la misma.

En el punto $(-1, 0)$ el ángulo que forma la recta tangente a $f(x)$ con el eje de las x es $\theta_1 = arctg(-2)$. Para la recta tangente a $g(x)$, el mismo ángulo es $\theta_2 = arctg(2)$. De modo que el ángulo entre las dos rectas es la diferencia $arctg(-2) - arctg(2)$.

3) Utiliza el método de derivación logarítmica para calcular la derivada de las siguientes funciones:
i) $f(x) = x^{\frac{2}{5}}(x^2 + 8)^4\, e^{x^2+x}$,
ii) $f(x) = \dfrac{(x+1)^4(x-5)^3}{(x-3)^8}$,
iii) $f(x) = (1 + x)^{ln(1+x)}$.

La derivación logarítmica consiste en tomar logaritmos a un lado y al otro de la igualdad, derivar usando la regla de la cadena y despejar de ahí la derivada. Aportamos las soluciones finales:

i) $f'(x) = \frac{(x^2+8)^4 e^{x(x+1)}(10x^4+5x^3+122x^2+40x+16)}{5x^{3/5}}$.
ii) $f'(x) = -\frac{(x+1)^3(x-5)^2(x^2+6x-91)}{(x-3)^9}$.
iii) $f'(x) = 2(1 + x)^{ln(x+1)-1}$.

4) Un semidisco de diámetro PQ se apoya en la base de un triángulo isosceles PQR formando una región (similar a un helado de cucurucho). Sea θ el ángulo $P\hat{R}Q$. Si $A(\theta)$ es el área del semidisco y $B(\theta)$ es el área del triángulo,

i) determina $\underset{\theta\to 0^+}{lím} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$. (Escribe $A(\theta)$ y $B(\theta)$ en términos de $\frac{\theta}{2}$ y OR, donde O es el punto medio de PQ.)

ii) Calcula la variación del área de la región respecto de la variable θ cuando $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Sea O el punto medio del segmento PQ. Debemos observar primero que la longitud de OR es constante. Representando la longitud de los segmentos con las letras que representan sus extremos tenemos:

$$A(\theta) = \frac{\pi(OQ)^2}{2} \qquad B(\theta) = (OQ)(OR).$$

Usando trigonometría se obtiene:

$$OQ = (RQ)sen(\theta/2) \qquad OR = (RQ)cos(\theta/2).$$

Entonces

$$\frac{A(\theta)}{B(\theta)} = \frac{\pi}{2}tg(\theta/2).$$

De modo que converge a 0 cuando θ tiende a 0 por la derecha, respondiendo así a i). Por otro lado como

$$A(\theta) + B(\theta) = \frac{\pi}{2}(OR)^2 tg^2(\theta/2) + (OR)^2 tg(\theta/2).$$

La variación vendría dada por la derivada en $\theta = \pi/3$.

$$(A+B)'(\pi/3) = \frac{2\pi(OR)^2}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{3}(OR)^2.$$

5) La velocidad S de la sangre que está a r cm del centro de una arteria viene dada por $S = C\,(R^2 - r^2)$, donde C es una constante, R es el radio de la arteria y S se mide en cm/s.
Se administra un fármaco y la arteria empieza a dilatarse a un ritmo $\dfrac{dR}{dt}$.
A una distancia constante r, halla el ritmo de cambio de S con respecto a t para $C = 1,76 \times 10^5$, $\quad R = 1,2 \times 10^{-2}$ y $\dfrac{dR}{dt} = 10^{-5}$.

Derivamos la función S con respecto al tiempo: $\frac{dS}{dt} = C(2R\frac{dR}{dt})$.
Sustituimos los valores que se nos dan:

$$1,76 \times 10^5(2 \times 1,2 \times 10^{-2} \times 10^{-5}) = 4.224 \times 10^{-2}.$$

6) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Verificar que si $|f'(x)| < \frac{1}{3}$ para todo $x \in (a,b)$ entonces f es contractiva en (a,b).

(Una función f es contractiva en (a, b) si existe una constante C con $0 < C < 1$ tal que para todo $x, y \in (a, b)$ $\quad |f(y) - f(x)| \leq C|y - x|$.)

Se trata de una aplicación del teorema del valor medio por el que para cada par de números x, y tales que $a < x < y < b$ existe $c \in (x, y)$ tal que:

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y|.$$

Como por hipótesis se tiene que $|f'(c)| < 1/3$ se tiene que la función f es contractiva tomando por ejemplo $C = 1/3$.

BASES DE MATEMÁTICAS

Soluciones de la HOJA 5

2000-2001

---

1) Usando las propiedades de la integral demostrar que para cada n natural se tiene la siguiente desigualdad:

$$|\int_0^1 \frac{e^{-nx^2}}{x+1}dx| \leq ln(2)$$

$$|\int_0^1 \frac{e^{-nx^2}}{x+1}dx| \leq \int_0^1 |\frac{e^{-nx^2}}{x+1}|dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = ln(2) - ln(1) = ln(2)$$

2) Hallar el valor $\mu \in \mathbb{R}$ que cumpla que

$$\int_1^3 f(x)dx = 2\mu.$$

Siendo $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 1$ si $x \in [1,2]$ y $f(x) = 2$ si $x \in (2,3]$.

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 dx + 2\int_2^3 dx = 1 + 2 = 3.$$

Entonces $\mu = \frac{3}{2}$.

Estudiar si existe algún punto $c \in (1,3)$ tal que $f(c) = \mu$.

Por definición de $f(x)$, no existe $c \in (1,3)$ tal que $f(c) = \mu$.

Estudiar si la respuesta del apartado anterior contradice el teorema integral del valor medio.

La respuesta no contradice el teorema integral del valor medio ya que la función $f(x)$ no es continua.

3) Demostrar utilizando el teorema integral del valor medio que dados dos números reales estrictamente positivos a y b, existe $c \in (a, b)$ de modo que:

$$\int_a^b x^5 ln(1+x^3)dx = ln(1+c^3)(\frac{b^6}{6} - \frac{a^6}{6}).$$

Siendo $b > a > 0$, la función $f(x) = ln(1+x^3)$ es continua en $[a, b]$ y la función $g(x) = x^5$ es continua y no negativa en $[a, b]$.
Por el teorema del valor medio integral existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b x^5 ln(1+x^3)dx = ln(1+c^3)\int_a^b x^5 dx = ln(1+c^3)(\frac{b^6}{6} - \frac{a^6}{6}).$$

4) Calcular la derivada de las siguientes funciones:

$$i)\ F(x) = \int_0^{x^2} sen(t^2)dt \quad ii)\ G(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{1+t^3}dt$$
$$iii)\ H(x) = \int_0^{x^2} x\, sen(t^2)dt \quad iv)\ I(x) = \int_{-x^2}^{x^2} \sqrt{1+t^2}dt.$$

$$i)\ F'(x) = 2xsen(x^4)$$
$$ii)\ G'(x) = \frac{2x}{1+x^6}$$
$$iii)\ H'(x) = \int_0^{x^2} sen(t^2)dt + 2x\, sen(x^4)$$
$$iv)\ I'(x) = 2x\sqrt{1+x^4} + 2x\sqrt{1+x^4} = 4x\sqrt{1+x^4}.$$

5) Calcular el límite cuando x tiende a 0 de la siguiente función:

$$\frac{\int_0^{x^2} sen(\sqrt{t})dt}{x^3}.$$

Siendo $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^{x^2} sen(\sqrt{t})dt = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$ y $3x^2 \neq 0$ si $x \neq 0$, podemos usar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} sen(\sqrt{t})dt}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{sen(|x|)2x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\frac{sen(|x|)}{x}.$$

El último límite no existe ya que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{3}\frac{sen(|x|)}{x} = \frac{2}{3}$$

y

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{2}{3}\frac{sen(|x|)}{x} = -\frac{2}{3}.$$

6) Calcular las siguientes integrales indefinidas:

$$i)\ \int e^{4x}dx \qquad ii)\ \int \frac{x^3}{2+x^8}dx$$

$$iii)\ \int x^5 ln(x)dx \qquad iv)\ \int e^x cos(x)dx$$

$$v)\ \int \frac{x^2+1}{(x^4-x^2)}dx \qquad vi)\ \int \frac{x-1}{x^3+x^2-2x}dx.$$

$$i)\ \int e^{4x}dx = \frac{e^{4x}}{4} + C$$

$$ii)\ \int \frac{x^3}{2+x^8}dx \underset{t=x^4}{=} \frac{1}{4}\int\frac{dt}{2+t^4} = \frac{1}{8}\int\frac{dt}{1+(\frac{t}{\sqrt{2}})^2} = \frac{\sqrt{2}}{8}arctg(\frac{t}{\sqrt{2}}) + C$$

$$iii)\ \int x^5 ln(x)dx = \frac{x^6}{6}ln(x) - \int\frac{x^6}{6}\frac{1}{x}dx = \frac{x^6}{6}ln(x) - \frac{1}{6}\int x^5 dx =$$

$$= \frac{x^6}{6} - \frac{x^6}{36} + C = \frac{5}{6}x^6 + C.$$

$$iv)\ \int e^x cos(x)dx = e^x cos(x) + \int e^x sen(x)dx = e^x cos(x) + e^x sen(x) - \int e^x cos(x)dx.$$

Entonces

$$\int e^x cos(x)dx = \frac{e^x}{2}(cos(x)+sen(x)) + C.$$

$$v) \int \frac{x^2+1}{(x^4-x^2)}dx = \int \frac{x^2+1}{x^2(x-1)(x+1)}dx.$$

La solución de la ecuación

$$\frac{x^2+1}{(x^4-x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}$$

es $A = 0, B = -1, C = 1, D = -1$. Se sigue que

$$\int \frac{x^2+1}{(x^4-x^2)}dx = \int \frac{-1}{x^2}dx + \int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{1}{x+1}dx =$$

$$= \frac{1}{x} + ln(|x-1|) - ln(|x+1|) + C = \frac{1}{x} + ln(\frac{|x-1|}{|x+1|}) + C.$$

$$vi) \int \frac{x-1}{x^3+x^2-2x}dx = \int \frac{x-1}{x(x-1)(x+2)}dx = \int \frac{1}{x(x+2)}dx.$$

En este caso la solución de la ecuación

$$\frac{1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$$

es $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}$ y

$$\int \frac{x-1}{x^3+x^2-2x}dx = \frac{1}{2}ln(|x|) - \frac{1}{2}ln(|x+2|) + C = ln(\sqrt{|\frac{x}{x+2}|}) + C.$$

7) Estudiar las siguientes integrales impropias:

$$i) \int_1^{\infty} \frac{ln(x)}{x^3}dx,$$

$$ii) \int_0^{\pi/4} \frac{cos(x)}{\sqrt{sen(x)}}dx,$$

$$iii) \int_0^4 \frac{1}{x^2+x-6}dx.$$

$$i)\ \int_1^{\infty}\frac{ln(x)}{x^3}dx=\lim_{c\to\infty}\int_1^c\frac{ln(x)}{x^3}dx\underset{t=ln(x)}{=}\lim_{c\to\infty}\int_0^{ln(c)}\frac{t}{e^{2t}}dx=$$

$$=\lim_{c\to\infty}(\frac{te^{-2t}}{-2}|_0^{ln(c)}+\frac{1}{2}\int_0^{ln(c)}e^{-2t})=\lim_{c\to\infty}-\frac{ln(c)}{c^2}-\frac{1}{4c^2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

$$ii)\ \int_0^{\pi/4}\frac{cos(x)}{\sqrt{sen(x)}}dx=\lim_{c\to 0^+}\int_c^{\pi/4}\frac{cos(x)}{\sqrt{sen(x)}}dx\underset{t=\sqrt{sen(x)}}{=}2\lim_{c\to 0^+}\int_{\sqrt{sen(c)}}^{\sqrt{sen(\pi/4)}}dt=$$

$$=2\lim_{c\to 0^+}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}-\sqrt{sen(c)}=\sqrt{2\sqrt{2}}.$$

$$iii)\ \int_0^4\frac{1}{x^2+x-6}dx=\int_0^4\frac{1}{(x+3)(x-2)}dx=$$

$$=\lim_{c\to 2^-}\int_0^c\frac{1}{(x+3)(x-2)}dx+\lim_{c\to 2^+}\int_0^c\frac{1}{(x+3)(x-2)}dx.$$

Ahora, siendo

$$\int\frac{1}{(x+3)(x-2)}dx=-\frac{1}{5}\int\frac{1}{x+3}dx+\frac{1}{5}\int\frac{1}{x-2}dx=\frac{1}{5}ln(|\frac{x-2}{x+3}|)+C,$$

se sigue que

$$\lim_{c\to 2^-}\int_0^c\frac{1}{(x+3)(x-2)}dx=\lim_{c\to 2^-}\frac{1}{5}(ln(|\frac{c-2}{c+3}|)-ln(\frac{2}{3}))=-\infty$$

y, por tanto, la integral inicial diverge.

Capítulo 9

Soluciones de las hojas de problemas 2001-2002

BASES DE MATEMÁTICAS

Soluciones de la HOJA 1

2001-2002

---

1) Sean a y b dos números naturales, A el conjunto formado por los números enteros múltiplos de a, y B el formado por los múltiplos de b. Se pide determinar el conjunto $A \cap B$ en términos del mínimo comun múltiplo entre a y b, m.c.m.(a,b).
¿Son A, B y $A \cap B$ conjuntos numerables?
¿Puedes construir una biyección entre los dos conjuntos A y B?, ¿cómo?.
Si $a = 2$ calcular el complementario relativo de A respecto de los números naturales.

$a, b \in \mathbb{N}$. $A = \{ap : p \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{bp : p \in \mathbb{Z}\}$

$A \cap B = \{x \in \mathbb{Z} : x = ap \quad y \quad x = bq \quad para \quad ciertos \quad p, q \in \mathbb{Z}\}$

Sea $m = m.c.m(a.b)$ el mínimo común múltiplo entre a y b.

Entonces m cumple:

a) m es múltiplo común de a y b.

b) Si n es otro múltiplo de a y b, m divide a n.

Si $x \in A \cap B$ entonces x es múltiplo de a y de b, y utilizando la propiedad b) x es múltiplo de n. Por tanto,

$$A \cap B \subseteq \{x \in \mathbb{Z} : x = mp, p \in \mathbb{Z}\}$$

Viceversa, si $x = mp$ entonces es múltiplo de a y de b ya que m lo es. Se sigue que

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{Z} : x = mp, p \in \mathbb{Z}\}$$

Las funciones $f_1(n) = an$, $f_2(n) = bn$ y $f_3(n) = mn$ para $n\mathbb{Z}$ son biyecciones entre los conjuntos A, B, $A \cap B$ y el conjunto $\mathbb{Z}$ respectivamente, y por ser $\mathbb{Z}$ numerables estos conjuntos también lo serán.

Sea $f : A \to B$ definida por $f(ap) = bp$.

f es inyectiva: $f(ap) = f(aq) \Rightarrow bp = bq \Rightarrow p = q$ $(b \neq 0) \Rightarrow ap = aq$.

f es sobreyectiva: Sea $bp \in B$, entonces $bp = f(ap)$ por tanto f es biyectiva.

Si $a = 2$ A es el conjunto de los números enteros pares por tanto,

$$\mathbb{N} \backslash A = \{n \in \mathbb{N} : n \notin A\}$$

son los números naturales impares.

2) Sea A el conjunto formado por $A = \{1, 7, x\}$, se pide:

- a) Construir una relación binaria en A, que sea simétrica y transitiva.
- b) Construir una relación binaria en A, reflexiva y antisimétrica.
- c) Construir una relación binaria en A, no simétrica y reflexiva.
- d) ¿Puede existir una relación simétrica y antisimétrica a la vez?.
- e) ¿Como se llaman las relaciones reflexivas, simétricas y transitivas?, ¿y las reflexivas, antisimétricas y transitivas?.

a) y b) La relación identidad en A, $Id_A = \{(1, 1), (7, 7), (x, x)\}$ es una relación binaria reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva.

c) La relación binaria $R = \{(1, 1), (7, 7), (x, x), (1, 7)\}$ es una relación reflexiva y no es simétrica ya que $(1, 7) \in R \not\Rightarrow (7, 1) \in R$

d) La relación Id_A es simétrica y antisimétrica a la vez.

e) Las relaciones reflexivas, simétricas y transitivas son las relaciones de equivalencias. Las relaciones reflexivas, antisimétricas y transitivas son las relaciones de orden.

3) Se considera el conjunto formado por los números naturales $\mathbb{N}$, y las siguientes relaciones en $\mathbb{N}$:

- R_1 donde mR_1n si n es un múltiplo de m.
- R_2 donde mR_2n si $m - n$ es un múltiplo entero de 3.
- R_3 donde mR_3n si el máximo comun divisor entre m y n, $m.c.d.(m, n)$, es un número primo (un número entero p es primo si los únicos divisores de p son $1, -1, p, -p$).

se pide:

- a) De las anteriores relaciones, ¿cuáles son reflexivas y cuáles son simétricas?.
- b) ¿Cuáles son relaciones de orden y cuáles son de equivalencia?.
- c) ¿Hay alguna relación de orden estricto?, ¿y de orden total?.
- d) En aquellas que son relaciones de equivalencia estudia el número de clases de equivalencia.

$$R_1 = \{(m,n) \in \mathbb{N}\text{x}\mathbb{N} : m = pn, p \in \mathbb{Z}\} =$$

$$\{(m,n) \in \mathbb{N}\text{x}\mathbb{N} : m = pn, p \in \mathbb{N}\}$$

$$R_2 = \{(m,n) \in \mathbb{N}\text{x}\mathbb{N} : m - n = 3p, p \in \mathbb{Z}\}$$

$$R_3 = \{(m,n) \in \mathbb{N}\text{x}\mathbb{N} : m.c.d(m,n) = p, \quad donde \quad p \quad es \quad primo\}$$

	reflexiva	simétrica	antisimétrica	transitiva
R_1	Si	No	Si	Si
R_2	Si	Si	No	Si
R_3	No	Si	No	No

R_1 es reflexiva ya que $m = 1 \cdot m$ para todo $m \in \mathbb{N}$,
no es simétrica ya que $(3,6) \notin R_1$, es antisimétrica ya que

$$m = pn \quad y \quad n = qm \Rightarrow n = (pq)n \Rightarrow pq = 1 \Rightarrow p = q = 1$$

R_1 es transitiva ya que

$$(m,n) \in R_1 \quad y \quad (m,a) \in R_1 \Rightarrow m = pn \quad y \quad n = qa \Rightarrow m = (pq)a \Rightarrow (m,a) \in R_1$$

R_2 es reflexiva ya que para todo $m \in \mathbb{N}$, $m - m = 0 \cdot 3$.
R_2 es simétrica ya que $mR_2n \Rightarrow m - n = 3p, p \in \mathbb{Z}, \Rightarrow n - m = 3(-p) \Rightarrow nR_2m$.

R_2 no es antisimétrica ya que $1R_24$ y $4R_21$ y $4 \neq 1$.
R_2 es transitiva ya que

$$mR_2n \Rightarrow m-n = 3p\,(p \in \mathbb{Z}) \quad y \quad nR_2r \Rightarrow n-r = 3q\,(q \in \mathbb{Z}) \Rightarrow m-r = 3(p+q) \Rightarrow mR_2r.$$

R_3 no es reflexiva ya que, por ejemplo, $m.c.d(6,6) = 6$ y 6 no es primo.
R_3 es simétrica ya que $m.c.d(a,b) = m.c.d(b,a)$.
R_3 no es antisimétrica ya que $m.c.d(6,3) = 3 = m.c.d(3,6)$ y $3 \neq 6$.
R_3 no es transitiva ya que $m.c.d(6,9) = 3$, $m.c.d(9,12) = 3$ y $m.c.d(6,12) = 6$ que no es primo.

b) Relación de orden: R_1. Relación de equivalencia: R_2.

c) No hay relación de orden estricto ya que la que son transitivas son reflexivas. No hay relación de orden total ya que la única relación de orden es R_1 y por ejemplo los numeros 3 y 5 no se pueden comparar.

d) Sea $m \in \mathbb{N}$, entonces

$$C(m) = \{n \in \mathbb{N} : m - n = 3p,\, p \in \mathbb{Z}\} =$$

$$\{n \in \mathbb{N} : n = m - 3p,\, p \in \mathbb{Z}\}$$

$C(1) = \{1, 4, 7, 10...\}$ números que al dividirlos por 3 dan resto 1

$C(2) = \{2, 5, 8, 11...\}$ números que al dividirlos por 3 dan resto 2

$C(3) = \{3, 6, 9, 12...\}$ números que al dividirlos por 3 dan resto 0

por tanto hay tres clases de equivalencias.

4) Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, definida por $f(a) = (a-n)^2$, donde n es un número entero. ¿Para que valores de n, f es inyectiva, sobreyectiva, y biyectiva?. Determinar la imagen de f para $n \geq 0$.

Sea la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f(a) = (a-n)^2$ busquemos donde no es inyectiva. Sean a_1, a_2 dos números naturales tales que $a_1 \neq a_2$ y que

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow (a_1 - n)^2 = (a_2 - n)^2 \Rightarrow |a_1 - n| = |a_2 - n| \Rightarrow$$

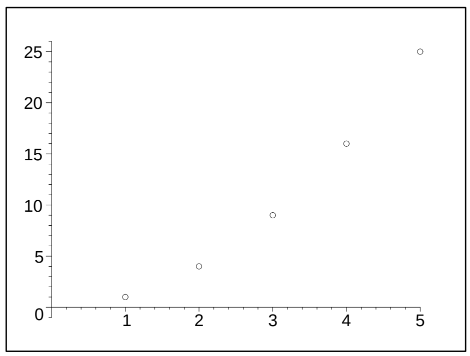
$$a_1 - n = a_2 - n \text{ ó } a_1 - n = -a_2 + n$$

la primera igualdad no nos interesa ya que da $a_1 = a_2$, y de la segunda tenemos $a_1 + a_2 = 2n$ y como $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ y $a_1 \neq a_2$ entonces $a_1 + a_2 \geq 3$. Por tanto si $n < 2$ es inyectiva, y como para $n \geq 2$ todo número $(2n)$ se puede expresar como suma de dos números naturales distintos (2n=(2n-1) +(1)) la función no es inyectiva.

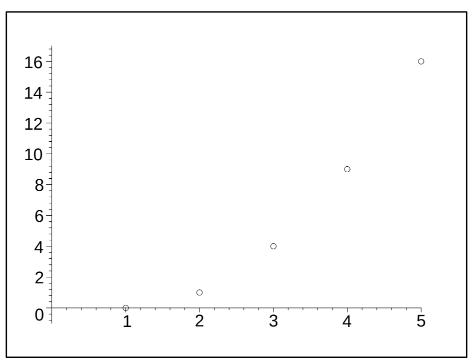
Nunca f es sobreyectiva ya que $3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $3 \neq (a-n)^2$, por tanto nunca es biyectiva.

La imagen de f para $n \geq 0$ es $\mathbb{N} \cup \{0\}$ si $n \neq 0$, y $\mathbb{N}$ si $n = 0$.

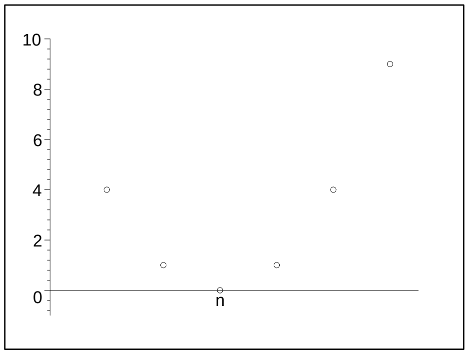
Para $n = 0$



Para $n = 1$

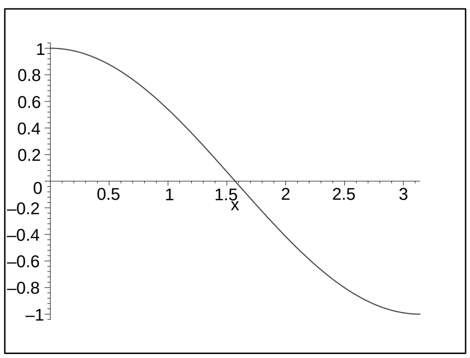


Para $n > 1$



5) Sea $f : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ definida por $f(x) = cos(x)$. ¿Es f inyectiva?, ¿y sobreyectiva?.

$f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = cos(x)$ es inyectiva y sobreyectiva.



6) Encuentra el conjunto solución de los $x \in R$ que verifican:

- a) $|x - 3| \leq 8$
- b) $|x - 1| + |x - 2| > 1$
- c) $|x - 1||x + 2| = 3$
- d) $|x| + |x - 1| + |x - 2| - 2.5 = 0$

- e) $\dfrac{2x+8}{x^2+8x+7}>0$

a)

$$|x-3|\leq 8 \Rightarrow -8\leq x-3\leq 8 \Rightarrow -5\leq x\leq 11$$

por tanto el conjunto solución es $S=[-5,11]$

b)

$|x-1|-|x-2|>1$

$$|x-1|=\begin{cases} x-1, & \text{si } x\geq 1 \\ -x+1, & \text{si } x<1 \end{cases}$$

$$|x-2|=\begin{cases} x-2, & \text{si } x\geq 2 \\ -x+2, & \text{si } x<2 \end{cases}$$

Esto implica que tendremos tres regiones

1) Si $x<1,\ -x+1-x+2>1 \Rightarrow 1>x\ (-\infty,1)$.

2) Si $1\leq x<2\ x-1-x+2>1 \Rightarrow 0<0$ no hay solución.

3) Si $x\geq 2,\ x-1+x-2>1 \Rightarrow x>2\ (2,\infty)$.

Por tanto el conjunto solución $S=(-\infty,1)\cup(2,\infty)$.

c)

$|x-1||x+2|=3,$

$$|x-1|=\begin{cases} x-1, & x\geq 1, \\ -x+1, & x<1, \end{cases}$$

$$|x+2|=\begin{cases} x+2, & x\geq -2, \\ -x-2, & x<-2. \end{cases}$$

1) $x<-2$.

$(-x+1)(-x-2)=3$, $(1-x)(x+2)=-3$,

multiplicando obtenemos,

$$(x+2)-x^2-2x=-3,$$

es decir $-x^2 - x + 5 = 0$, cuyas raíces son $x_1 = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$,

y

$x_2 = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$,

como $x_1 > -2$ la única raíz en el intervalo es x_2.

2) $-2 \leq x < 1$.

$(-x+1)(x+2) = 3$,

multiplicando obtenemos, $-x^2 - 2x + x + 2 = 3$, es decir $x^2 + x + 1 = 0$, cuyas raíces son $x_1 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$,

y

$x_2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$,

que son complejas, y por tanto no hay soluciones en el intervalo.

3) $1 \leq x$.

$(x-1)(x+2) = 3$,

multiplicando obtenemos, $x^2 + x - 5 = 0$, cuyas raíces son

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$,

y

$x_2 = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$,

como $x_2 < 1$ la única raíz en el intervalo es x_1.

d)

$|x| + |x-1| + |x-2| = \frac{5}{2}$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases} \qquad |x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1, \\ -x+1, & x < 1, \end{cases} \qquad |x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2, \\ -x+2, & x < 2. \end{cases}$$

1) $x < 0$.

$-x - x + 1 - x + 2 - \frac{5}{2} = 0$, y agrupando los términos obtenemos

$-3x + \frac{1}{2} = 0$ cuya única solución es $x = \frac{1}{6}$ que no pertenece al intervalo, y por tanto no hay soluciones.

2) $0 \leq x < 1$.

$x - x + 1 - x + 2 - \frac{5}{2} = 0$, y agrupando los términos obtenemos $-x + \frac{1}{2} = 0$ cuya única solución es $x = \frac{1}{2}$ que pertenece al intervalo.

3) $1 \leq x < 2$.

$x+x-1-x+2-\frac{5}{2}=0$, y agrupando los términos obtenemos $x-\frac{3}{2}=0$ cuya única solución es $x=\frac{3}{2}$ que pertenece al intervalo.

4) $2 \leq x$.

$x+x-1+x-2-\frac{5}{2}=0$, y agrupando los términos obtenemos $3x-\frac{11}{2}=0$ cuya única solución es $x=\frac{11}{6}$ que no pertenece al intervalo.

Luego las soluciones son $x=\frac{1}{2}$ y $x=\frac{3}{2}$.

e)
$\frac{2x+8}{x^2+8x+7}>0$
Las raíces del polinomio x^2+8x+7 son $x=-7$ y $x=-1$. Las raíces de $2x+8$ son $x=-4$, consideramos por tanto los intervalos $(-\infty,-7)$, $(-7,-4)$, $(-4,-1)$ y $(-1,\infty)$.

En $(-\infty,-7)$ el numerador es negativo y el denominador es positivo, por tanto $\frac{2x+8}{x^2+8x+7}<0$.

En $(-7,-4)$ numerador y denominador son negativos, por tanto $\frac{2x+8}{x^2+8x+7}>0$.

En $(-4,-1)$ el numerador es positivo y el denominador negativo, por tanto $\frac{2x+8}{x^2+8x+7}<0$.

En $(-1,\infty)$, ambos son positivos, luego
$\frac{2x+8}{x^2+8x+7}>0$.

En $x=-4$, $\frac{2x+8}{x^2+8x+7}=0$, y en $x=-7,-1$ no está definido.

La solución es $(-7,-4)\cup(-1,\infty)$.

7) Probar que:

- a) $|a+b|=|a|+|b| \Leftrightarrow ab \geq 0$
- b) $max(\{x,y\})=\frac{x+y+|y-x|}{2}$

a) $|a+b|=|a|+|b| \Longleftrightarrow |ab|=ab$.

$|a+b|=|a|+|b| \Longleftrightarrow |a+b|^2=(|a|+|b|)^2$

sabemos que

$|a+b|^2=(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ y que $(|a|+|b|)^2=|a|^2+|b|^2+2|a||b|=a^2+b^2+2|a||b|$, sustituyendo, resulta

$|a+b|=|a|+|b| \Longleftrightarrow a^2+b^2+2ab=a^2+b^2+2|a||b| \Longleftrightarrow 2ab=2|a||b| \Longleftrightarrow ab=|a||b|$.

Como queríamos demostrar.

b) $\max\{x,y\} = \frac{x+y+|y-x|}{2}$

$$|y-x| = \begin{cases} y-x, & y \geq x, \\ -y+x, & y < x. \end{cases}$$

Si $y \geq x$ entonces $\max\{x,y\} = y$ y por tanto

$$\frac{x+y+|y-x|}{2} = \frac{x+y+y-x}{2} = \frac{2y}{2} = y.$$

Si $y < x$ entonces $\max\{x,y\} = x$ y por tanto

$$\frac{x+y+|y-x|}{2} = \frac{x+y-y+x}{2} = \frac{2x}{2} = x.$$

8) Hallar el supremo y el ínfimo de:
$A = \{x \in R : 3x^2 - 10x + 3 < 0\}$,
$B = \{x \in \mathbb{R} : (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) < 0\}$
donde a, b, c, d son números reales tales que $a < b < c < d$,
$C = \{x = 2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$
Hallar el supremo y el ínfimo de

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 3x^2 - 10x + 3 < 0\}.$$

Las raíces de $3x^2 - 10x + 3$ son $x_1 = -\frac{1}{3}$ y $x_2 = -3$. $A = (-3, -\frac{1}{3})$, por tanto el ínfimo de A es -3 y el supremo es $-\frac{1}{3}$.

$$B = \{x \in \mathbb{R} : (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) < 0, a < b < c < d\}.$$

$B = (a,b) \cup (c,d)$, el ínfimo de B es a y el supremo es d.

$$C = \{x = 2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}.$$

$Sup(C) = \frac{1}{2}$, ya que $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2}, \forall n \leq 1$.
$Inf(C) = 0$, ya que $0 < \frac{1}{2^n}$ y para todo número real positivo u existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^n > \frac{1}{u}$, y por tanto $\frac{1}{2^n} < u$.
Nota: Se puede demostrar por inducción que $2^n > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
9) Demostrar que $a = 3 + \sqrt{2}$ y $b = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ son números irracionales. (Sugerencia: usar el hecho de que $\sqrt{2}$ y $\sqrt{6}$ son irracionales.)

$a = 3 + \sqrt{2}$. Por reducción a lo absurdo, suponemos que es un número racional, por tanto $a - 3$ también lo es, lo cual es una contradicción con el hecho de que $\sqrt{2}$ no es racional.

$b = \sqrt{3} + \sqrt{2}$. Por reducción a lo absurdo, suponemos que es un número racional, y por tanto su cuadrado también lo es:

$$b^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 3 + 2 + 2\sqrt{6},$$

así, $\sqrt{6} = \frac{b^2-5}{2}$, lo cual es una contardicción con el hecho de que $\sqrt{6}$ no es racional.

Nota: la demostración de que $\sqrt{6}$ no es racional es similar a la del caso $\sqrt{2}$.

BASES DE MATEMÁTICAS

Soluciones de la HOJA 2

2001-2002

---

1) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente, e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una divergente. ¿Qué puedes decir, en relación con la convergencia, de las sucesiones $\{x_ny_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{x_n+y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{x_n/y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (suponiendo que $y_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$)?

La sucesión $\{x_ny_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ puede ser convergente, por ejemplo si $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, o divergente, por ejemplo si $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
La sucesión $\{x_n+y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no puede ser convergente ya que, si lo fuese, la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_n+y_n\}_{n\in\mathbb{N}} - \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sería convergente.
La sucesión $\{x_n/y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ puede ser convergente, por ejemplo si $x_n = 1$ e $y_n = n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, o divergente, por ejemplo si $x_n = 1$ e $y_n = (-1)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

2) Probar que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente si y sólo si sus subsucesiones $\{x_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{x_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen al mismo límite.

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y $L = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, toda subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L.
Si $L = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}$, entonces para todo $\epsilon > 0$, existen $n_1(\epsilon) \in \mathbb{N}$ y $n_2(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tales que $|x_{2k} - L| < \epsilon$ si $2k \geq n_1(\epsilon)$ y $|x_{2k-1} - L| < \epsilon$ si $2k-1 \geq n_1(\epsilon)$.
Se sigue que para todo $n \geq n(\epsilon) = máximo(n_1(\epsilon), n_2(\epsilon)), \quad |x_n - L| < \epsilon$.

3) Hallar, si existen, los siguientes límites

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4+n^2+1}{2n^4+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+n^2+1}{2n^4+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/n^2+1/n^4}{2+1/n^4} = \frac{1}{2}.$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+n^2+1}{2n^4+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2+1}{2n^4+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n+1/n^2+1/n^4}{2+1/n^4} = 0.$$

c) $\lim_{n\to\infty}(\frac{n^2+1}{n^2-3n})^{\frac{n^2-1}{2n}}$

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n^2+1}{n^2-3n})^{\frac{n^2-1}{2n}} = \lim_{n\to\infty}((1+\frac{3n+1}{n^2-3n})^{\frac{n^2-3n}{3n+1}})^{\frac{3n+1}{n^2-3n}\frac{n^2-1}{2n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}((1+\frac{3n+1}{n^2-3n})^{\frac{n^2-3n}{3n+1}})^{\frac{3n^3+n^2-3n-1}{2n^3-6n^2}} = \lim_{n\to\infty}((1+\frac{3n+1}{n^2-3n})^{\frac{n^2-3n}{3n+1}})^{\frac{3+1/n-3/n^2-1/n^3}{2-6/n}}$$

$= e^{\frac{3}{2}}$

d) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n-1}}{(n-1)^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n-1}}{(n-1)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n-1)^n}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{-n}\frac{1}{n} = e\cdot 0 = 0.$$

e) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}-n-1$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}-n-1 = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-(n+1))\frac{\sqrt{n^2+1}+(n+1)}{\sqrt{n^2+1}+(n+1)} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{\sqrt{n^2+1}+(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{1+1/n^2}+(n+1)/n} = -1$$

f) $\lim_{n\to\infty}n^{-\frac{3}{n}}$

$$\lim_{n\to\infty}n^{-\frac{3}{n}} = \lim_{n\to\infty}(n^{-\frac{1}{n}})^3 = 1$$

g) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n 2^n}{n!}$

Utilizando el criterio del cociente (la sucesión tiene términos positivos):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{(n+1)}2^{(n+1)}}{(n+1)!}}{\frac{n^n2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}2(\frac{n+1}{n})^n = 2e > 1.$$

Por tanto la sucesión diverge.

h) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

$$\lim_{n\to\infty} 3\frac{(2/3)^{n+1}+1}{(2/3)^n+1} = 3$$

4) Si $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, y $u_n \neq 0$ $\forall n \geq 1$, calcula

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[u_n]{\frac{3-2u_n}{3+u_n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[u_n]{\frac{3-2u_n}{3+u_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{[(1-(2/3)u_n)^{3/2u_n}]^{2/3}}{[(1+(1/3)u_n])^{3/u_n}]^{1/3}} = \frac{e^{-2/3}}{e^{1/3}} = e^{-1}$$

5) Demuestra que la condición $\lim_{n\to\infty} a_n - n = 1$ implica $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = 1$. Calcula ambos límites para la sucesión $a_n = n + \sqrt{n}$, ¿qué puede concluirse de este resultado?.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - n}{n} + 1 = 0 + 1 = 1.$$

Sea $a_n = n + \sqrt{n}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n - n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$$

y $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 1.$

Se puede concluir que la condición $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = 1$ no implica que $\lim_{n\to\infty} a_n - n = 1$.

6) Demuestra que la siguiente sucesión es monótona acotada, calcular el límite

- $u_n = 3 + \frac{u_{n-1}}{2}$, para $n \geq 1$, $u_0 = 0$

Los primeros términos de la sucesión son:

$$u_0 = 0,\ u_1 = 3,\ u_2 = 9/2,\ u_4 = 21/4.$$

Verifiquemos por inducción que la sucesión está acotada superiormente por 6:
si $n = 1$, entonces $u_0 = 0 < 6$ y si $u_n < 6$ se sigue que $u_{n+1} = 3 + \frac{u_n}{2} < 3 + 3 = 6$.
Ahora, verifiquemos que es monótona creciente:
$u_{n+1} - u_n = 3 + \frac{u_n}{2} - u_n = 3 - \frac{u_n}{2} > 3 - 6/2 = 0$.
Por tanto la sucesión es convergente. Si $L = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$, tiene que ser $L = 3 + L/2$, es decir, $L = 6$.

7) Sea la sucesión definida por $u_n = 1 - \frac{u_{n-1}}{2}$, para $n \geq 1$, $u_0 = 0$.

- Demostrar que es contractiva. Hallar el límite.

  Para todo $n \geq 1$,

  $$|u_{n+1} - u_n| = |1 - \frac{u_n}{2} - 1 + \frac{u_{n-1}}{2}| = \frac{1}{2}|u_n - u_{n-1}|.$$

  Por tanto, la sucesión es contractiva con constante $C = \frac{1}{2}$.
  Si $L = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$, tiene que ser $L = 1 - L/2$, es decir, $L = 2/3$.

BASES DE MATEMÁTICAS

Soluciones de la HOJA 3

2001-2002

---

1) Estudia los límites laterales de las siguientes funciones en el origen, deduce a continuación si existe el límite.

a) $f(x) = \frac{x}{|x|}$

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

El limite no existe en $x = 0$.

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

El límite no existe.

c)$f(x) = \ln x^2$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

El límite no existe.

d) $f(x) = \frac{x^2}{sen(x)}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{sen(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{sen(x)}{x}} x = 1 \cdot 0 = 0$$

e) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

ya que para toda sucesión $\{a_n\} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$$

f) $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}(1 - e^{-\frac{1}{x}})}{e^{\frac{1}{x}}(1 + e^{-\frac{1}{x}})} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - e^{-\frac{1}{x}}}{1 + e^{-\frac{1}{x}}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}(e^{\frac{1}{x}} - 1)}{e^{-\frac{1}{x}}(e^{\frac{1}{x}} + 1)} =$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

El límite no existe.

g) $f(x) = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(1-x^2)}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1+\sqrt{1-x^2})} = \frac{1}{2}$$

h) $f(x) = xsen(\frac{1}{x})$

$$\lim_{x\to 0} xsen(\frac{1}{x}) = 0,$$

por el teorema del sandwich, ya que $|xsen(\frac{1}{x})| \leq |x|$ y $|x|$ tiende a cero cuando $x \to 0$.

2) Estudia las asíntotas de las siguientes funciones

a) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ $x \neq \pm 1$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = 1$$

$y = 1$ es una asíntota horizontal $\frac{x^2+1}{x^2-1} > 0$ si $|x| > 1$.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \infty \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty \quad \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \infty$$

$x = 1$ y $x = -1$ son asíntotas verticales.

b) $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$ $(x \neq 0)$

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

$y = 1$ es un asíntota horizontal

$$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

ya que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad y \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$x = 0$ es una asíntota vertical.

c) $h(x) = \ln \frac{1}{1+x^2}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \ln \frac{1}{1+x^2} = -\infty$$

no tiene asíntotas horizontales.

d) $k(x) = \frac{sen(x)}{x}$ $x \neq 0$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{sen(x)}{x} = 0$$

por el teorema del sandwich ya que $|\frac{sen(x)}{x}| \leq \frac{1}{x}$ y

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{|x|} = 0$$

$y = 0$ es una asíntota horizontal

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

no tiene asíntota verticales.

e) $l(x) = \ln|x-1|$ $(x \neq 1)$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \ln|x-1| = \infty$$

no tiene asíntotas horizontales, $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1} \ln|x-1| = -\infty$$

tiene una asíntota vertical, $x = 1$.

3) Sea f una función continua en un intervalo I abierto y acotado.
$f : I = (a,b) \to \mathbb{R}$, continua.

a) Demuestra que $|f|$ también es una función continua. ¿Es cierto el recíproco?.

La función $|f|$ es continua, siendo la función compuesta de dos funciones continuas.

Si $|f|$ es continua en (a,b), f no tiene que ser continua, por ejemplo la función

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ \ \ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

es discontinua en $x = 0$, pero $|f(x)| = 1$ es continua en $(-1,1)$

b) Si $f \geq C > 0$, demuestra que $\frac{1}{f}$ es una función continua y acotada.

Si $f \geq c > 0$, $\frac{1}{f}$ es continua ya que $f(x) > 0$, $\forall \in (a,b)$ y está acotada por $\frac{1}{c}$ ya que $|\frac{1}{f(x)}| \leq \frac{1}{c}$, $\forall \in (a,b)$

c) ¿Puedes contruir una función continua f que no alcance su máximo absoluto en I? ¿y una función no acotada?.

Sea $(0,1)$ y $f(x) = \frac{1}{x}$.

Entonces f es continua y no alcanza un máximo absoluto siendo no acotada superiormente.

d) Si I es un intervalo cerrado y acotado, ¿alcanza siempre f el mínimo absoluto en I?.

Si, por el teorema de Weierstrass.

e) Sea I el intervalo cerrado $[0,1]$ y sea $f(I) = I$. Demuestra que existe un punto $x_0 \in I$ tal que $f(x_0) = x_0$.(Ayuda, considera la función $x - f(x)$).

Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ continua.

La función $g(x) = x - f(x)$ es continua en [0,1] y $g(0) = 0 - f(0) \leq 0$, $g(1) = 1 - f(1) \geq 0$, si $g(0) = 0 \Rightarrow 0 = f(0)$, si $g(1) = 1 \Rightarrow 1 = f(1)$ en los demás casos $g(0) < 0$ y $g(1) > 0$. Implica que, por el teorema de la raíz, existe $c \in (0,1)$ tal que $g(c) = 0 \Rightarrow c = f(c)$.

4) Calcula el número de ceros de la función $f(x) = x - cos(x)$, y contruye un intervalo de longitud $\frac{\pi}{4}$ en el que se encuentren la raíz o raíces.

$|cos(x)| \leq 1$, si $|x| > 1$ entonces x no puede ser un cero de $f(x) = x - cos(x)$

Si $|x| \leq 1$ entonces, en $[-1,0)$ $cos(x) > 0$ y $x < 0$ esto implica que $f(x) < 0$ y en $[0,1]$ $f(0) = 0 - cos(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 - cos(1) > 0$.

Por el teorema de la raíz existe $c \in (0,1)$ tal que $f(c) = 0$, este c es único ya que $cos(x)$ es estrictamente decreciente en $(0,1)$ y x es estrictamente creciente.

Para aproximar el valor de c se puede emplear el método de bisección, $f(0) = -1$ y $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$, entonces $c \in (0, \frac{\pi}{4})$.

5) Calcula λ para que la función f sea continua en toda la recta real

$$f(x) = \frac{1}{\lambda x^2 - 2\lambda x + 1}.$$

Siendo $\lambda x^2 - 2\lambda x + 1$ un polinomio, $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ si y sólo si $\lambda x^2 - 2\lambda x + 1$ no tiene raíces reales.

Si $\lambda = 0$, $\lambda x^2 - 2\lambda x + 1 = 1 \neq 0$.

Si $\lambda \neq 0$, $\lambda x^2 - 2\lambda x + 1 = 0$ si y sólo si

$$x = \frac{2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 - 4\lambda}}{2\lambda}$$

Tiene que ser $\lambda(\lambda - 1) < 0$, es decir $\lambda \in (0,1)$. Si $\lambda \in [0,1)$, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

6) Sea $f(x) = [x]$ (parte entera de x). Estudia los puntos de discontinuidad de f.

Sea $f(x) = [x]$, es decir, $f(x) = n$ si $n \leq x < n+1$, $n \in \mathbb{Z}$, esto implica

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = n, \qquad \lim_{x \to n^-} f(x) = n - 1,$$

por tanto f es discontinua en todo $\mathbb{Z}$

7) Estudia el dominio y la continuidad de las siguientes funciones

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

f está definida sólo si $x^2 - 5x + 6 \geq 0$.

Ahora, $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) \geq 0$ si $x \geq 3$ ó $x \leq 2$, por tanto $f(x)$ es continua en $(-\infty, 2] \cup [3, \infty)$, ya que es la composición de funciones continuas en ese intervalo.

b) $f(x) = \ln(xsen(x))$

$$dom(f) = \{x : xsen(x) > 0\} = \{x : x > 0, sen(x) > 0\} \cup$$

$$\cup \{x : x < 0, sen(x) < 0\} = \{x : 2k\pi < x < (2k+1)\pi, k \geq 0\} \cup$$

$$\cup \{x : (2k-1)\pi < x < 2k\pi, k \leq 0\}, (k \in \mathbb{Z}).$$

En $dom(f)$, f es continua al ser la compuesta de funciones continuas.

c) $f(x) = (x^2 - 5x + 6)^{\frac{1}{3}}$,

$dom(f) = \mathbb{R}$ y f es continua en $\mathbb{R}$ siendo la compuesta de funciones continuas.

d) $f(x) = arcsen(x^2)$,

$dom(f) = \{x : x`2 \in [-1, 1]\} = [-1, 1]$. En su dominio f es continua al ser la inversa de la función $sen(x)$ en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, que es continua y estrictamente creciente.

e) $f(x) = \sqrt{(x-5)ln(2-x)}$,

$dom(f) = \{x : (x-5)ln(2-x) \geq 0, 2-x > 0\} = \{x : (x-5) \leq 0, ln(2-x) \leq 0\} = [1, 2)$. f es continua en su dominio al ser compuesta de funciones continua.

8) Estudia la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - x & \text{si } 0 < x < 1 \\ cos(\pi|2 - x^2|) + 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Si $x \neq 0, 1$, f es continua.

Si $x = 0$,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^x = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 - x = 0$$

f es discontinua en $x = 0$

Si $x = 1$,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 - x = 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} cos(\pi|2 - x^2|) + 1 = 0 = f(1)$$

f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

9) Un caracol se encuentra en el fondo de un pozo de 1 metro de profundidad. Durante el día (12 horas) asciende 20 cm y por la noche (12 horas), mientras duerme, desciende 10 cm. Dí el número de veces que ha estado a 95 cm de profundidad, y cuantas a 90 cm, 85 cm, 10 cm y 5 cm. ¿Cuantos días y noches tarda en llegar al borde del pozo?.

1 vez a $95cm$, 2 veces a $90cm$, 3 veces a $85cm$, ..., 2 veces a $10cm$, 1 vez a $5cm$. 9 dias y 8 noches.

10) Sabiendo que la función $f(x) = e^x$ es estrictamente creciente, estudia la monotonía de las siguientes funciones:

a) $f(x) = ln(x)$, $x > 0$, estrictamente creciente, ya que es la inversa de e^x.

b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$, estrictamente decreciente, ya que la función identidad es creciente.

c) $f(x) = \frac{1}{sen(x)}$, $x \in (0, \pi)$, estrictamente decreciente en $(0, \frac{\pi}{2})$ y estrictamente creciente en $[\frac{\pi}{2}, \pi)$, utilizando el apartado b) y el comportamiento de la función $sen(x)$ en $(0, \pi)$.

d) $f(x) = \frac{1}{sen(x)}$, $x \in (\pi, 2\pi)$, estrictamente creciente en $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ y estrictamente decreciente en $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, utilizando el apartado b) y el comportamiento de la función $sen(x)$ en $(0, \pi)$.

e) $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$,

si $x < y$, $f(y) - f(x) = \sqrt{y} - \sqrt{x} = \frac{y-x}{\sqrt{y}+\sqrt{x}} > 0$ lo que implica que f es creciente.

f) $f(x) = e^{-\sqrt{x}} = \frac{1}{e^{\sqrt{x}}}$, $x > 0$

$x < y \Rightarrow e^{\sqrt{x}} < e^{\sqrt{y}} \Rightarrow \frac{1}{e^{\sqrt{x}}} > \frac{1}{e^{\sqrt{y}}}$, f es estrictamente decreciente en $(0, \infty)$.

11) Estudia si las siguientes ecuaciones tienen solución

a) $e^x - 2cos(x) = 0$

$f(x) = e^x - 2cos(x)$, $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = e - 1 > 0$. $f(x)$ tiene una solución en $(0, 1)$ por el teorema de la raíz.

b) $x^3 - 2x + 5 + \frac{1}{cos(x)} = 0$
$f(x) = x^3 - 2x + 5 + \frac{1}{cos(x)}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
La función $f(x)$ es continua en $(\frac{\pi}{2}, \pi]$, $f(\pi) = \pi^3 - 2\pi + 5 - 1 > 0$,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} x^3 - 2x + 5 + \frac{1}{cos(x)} = -\infty.$$

Por tanto existe un $c \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ tal que $f(c) < 0$. Por el teorema de la raíz, existe $x \in (c, \pi)$ tal que $f(x) = 0$.

c) $\ln(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$, ¿Cuantas soluciones tiene la ecuación?.

Sea $f(x) = ln(x) - \frac{1}{x}$, tenemos que f es continua en $(0, \infty)$, $f(1) = -1 < 0$ y $f(e) = 1 - \frac{1}{e} > 0$, por tanto existe una solución en $(1, e)$ y es única, ya que $\frac{1}{x}$ es estrictamente decreciente y $ln(x)$ es estrictamente creciente, (ver Problema 12).

12) Sea f una función estrictamente creciente y g una función decreciente, definidas en un intervalo I. ¿Cuantas soluciones tiene, a lo sumo, la ecuación $f(x) = g(x)$?. Construye dos funciones f y g en $(0, \infty)$ donde la ecuación anterior no tenga solución.

f es estrictamente creciente: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
g es decreciente: $x < y \Rightarrow g(x) \geq g(y)$.
Si existe $x \in I$ tal que $f(x) = g(x)$ entonces $\forall y \in I$
si $y > x$, $f(y) > f(x) = g(x) \geq g(y)$ y
si $y < x$, $f(y) < f(x) = g(x) \leq g(y)$.
Por tanto, a lo sumo, existe una sola solución.

Sean $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = -\frac{1}{x}$, $f(x) \neq g(x)$, $\forall x \in (0, \infty)$, al ser una positiva y la otra negativa.

BASES DE MATEMÁTICAS

Soluciones de la HOJA 4

2001-2002

---

1) Calcula la derivada de la función $f(x)$ en los puntos en que sea derivable:

a) $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$

El dominio de la función $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$ es $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Ya que la función $\sqrt[3]{x}$ no es derivables en $x=0$, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ y

$$f'(x)=\frac{1}{3}(\frac{x-1}{x+1})^{-\frac{2}{3}}\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{3}\frac{1}{(x+1)^{\frac{4}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}.$$

b) $f(x)=\sqrt[5]{(cotan(x^2))^8}$

Ya que la función $cotan(x)$ no está definida si $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, el dominio de la función $f(x)=(cotan(x^2))^{\frac{8}{5}}$ es $\mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{k\pi},k\in\mathbb{Z}\}$ y es derivable en su dominio.

$$f'(x)=\frac{8}{5}(cotan(x^2))^{\frac{3}{5}}(-cosec(x^2))^2 2x=-\frac{16x}{5}(cotan(x^2))^{\frac{3}{5}}(cosec(x^2))^2.$$

c) $f(x)=3^{arcsen(\sqrt{1-x^2})}$

La función $\sqrt{1-x^2}$ está definida si $|x|\leq 1$ y la función $arcsen(\sqrt{1-x^2})$ si $|\sqrt{1-x^2}|\leq 1$. Por tanto, el dominio de $f(x)$ es $[-1,1]$.

Las funciones $arcsen(x)$ y $\sqrt{1-x^2}$ son derivables si $x\notin\{-1,1\}$. Por tanto, la función $f(x)=3^{arcsen(\sqrt{1-x^2})}$ es derivable si $x\notin\{-1,0,1\}$ y

$$f'(x)=3^{arcsen(\sqrt{1-x^2})}ln(3)\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-2x)=$$

$$=-\frac{3^{arcsen(\sqrt{1-x^2})}ln(3)}{\sqrt{1-x^2}}\frac{x}{|x|}.$$

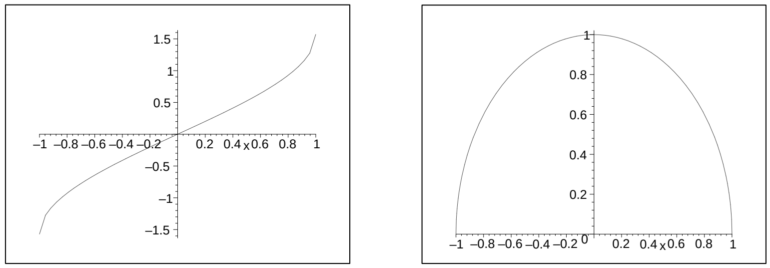


Figura 9.1: $arcsen(x)$ y $\sqrt{1-x^2}$

Si $x=0$ la función $f(x)$ no es derivable:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3^{arcsen(\sqrt{1-x^2})}-3^{arcsen(\sqrt{1})}}{x-0}=(0/0)=\lim_{x\to 0^+}-\frac{3^{arcsen(\sqrt{1-x^2})}xln(3)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-x^2}}=-3^{\frac{\pi}{2}}ln(3)$$

y

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{3^{arcsen(\sqrt{1-x^2})}-3^{arcsen(\sqrt{1})}}{x-0}=(0/0)=\lim_{x\to 0^-}-\frac{3^{arcsen(\sqrt{1-x^2})}xln(3)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-x^2}}=3^{\frac{\pi}{2}}ln(3).$$

Si $x=1$ la función $f(x)$ no es derivable:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{3^{arcsen(\sqrt{1-x^2})}-3^{arcsen(1)}}{x-1}=(0/0)=\lim_{x\to 1^-}-\frac{3^{arcsen(\sqrt{1-x^2})}xln(3)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-x^2}}=-\infty$$

Si $x=-1$ la función $f(x)$ no es derivable:

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{3^{arcsen(\sqrt{1-x^2})}-3^{arcsen(-1)}}{x+1}=(0/0)=\lim_{x\to -1^+}-\frac{3^{arcsen(\sqrt{1-x^2})}xln(3)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-x^2}}=\infty$$

d) $f(x)=|x^2-4|$
La función $f(x)=|x^2-4|$ es definida en $\mathbb{R}$ y $f(x)$ derivable en $\mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$.

$$f'(x)=\begin{cases}2x & \text{si } |x|>2,\\ -2x & \text{si } |x|<2.\end{cases}$$

Si $x=2$ la función $f(x)$ no es derivable:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4-0}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} x+2 = 4$$

y

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{-x^2+4-0}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} -(x+2) = -4$$

Si $x = -2$ la función $f(x)$ no es derivable:

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{-x^2+4-0}{x+2} = \lim_{x\to -2^+} -(x-2) = 4$$

y

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2-4-0}{x+2} = \lim_{x\to -2^-} x-2 = -4.$$

e) $f(x) = e^{cosec(5x)}$

El dominio de la función $f(x) = e^{cosec(5x)}$ es $\mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}\}$ y $f(x)$ es derivable en su dominio.

$$f'(x) = -5e^{cosec(5x)}cosec(5x)cotan(5x).$$

f) $f(x) = 2^{sec(x^2-3x+7)}$

El dominio de la función $f(x) = 2^{sec(x^2-3x+7)}$ es $\{x : x^2-3x+7 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ y $f(x)$ es derivable en su dominio.

$$f'(x) = 2^{sec(x^2-3x+7)}ln(2)sec(x^2-3x+7)tan(x^2-3x+7)(2x-3).$$

2) Utiliza la derivada logarítmica para calcular la derivada de la función

$$f(x) = \frac{(sen2x)^2(cos5x)^{1/3}(tan(x/2))^{7/5}}{(senx)^3(cos(x/3))^{1/4}}.$$

$$ln(f(x)) = 2ln(sen(2x)) + \frac{1}{3}ln(cos(5x)) + \frac{7}{5}ln(tan(\frac{x}{2}))+$$

$$-3ln(sen(x)) - \frac{1}{4}ln(cos(\frac{x}{3})),$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 4cotan(2x) - \frac{5}{3}tan(5x) + \frac{7}{5}\frac{1}{2cos(\frac{x}{2})sen(\frac{x}{2})} - 3cotan(x) + \frac{1}{12}tan(\frac{x}{3}).$$

Por tanto

$$f'(x) = f(x)[4cotan(2x) - \frac{5}{3}tan(5x) + \frac{7}{5}cosec(x) - 3cotan(x) + \frac{1}{12}tan(\frac{x}{3})].$$

3) Estudia la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} cos(x) & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ arctan(x) & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

La función $f(x)$ es continua y derivable en $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$ ya que está definida por polinomios o funciones trigonométricas derivables.
Ya que $f(0) = 1 = \lim_{x\to 0^-} cos(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 - x^2$, la función es continua en $x = 0$.

Siendo $\lim_{x\to 1^-} 1 - x^2 = 0$ y $\lim_{x\to 1^+} arctan(x) = \frac{\pi}{4}$, la función $f(x)$ no es continua en $x = 1$ y no puede ser derivable en este punto.

Siendo $\lim_{x\to 0^+} \frac{1-x^2-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$, y $\lim_{x\to 0^-} \frac{cos(x)-1}{x} = 0$, la función es derivable en $x = 0$ con $f'(0) = 0$.

Se sigue que $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

4) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

a) Estudia su continuidad y derivabilidad.

Si $x \neq 1$ la función $f(x)$ es derivable, siendo igual a funciones racionales con denominador y su derivada distintos de cero. Por tanto es también continua si $x \neq 1$. Siendo

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{3 - x^2}{2} = 1 = f(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x},$$

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.
Además,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{3-x^2}{2} - 1}{x - 1} = -\lim_{x\to 1^-} \frac{x + 1}{2} = -1 = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} -\frac{1}{x}.$$

Se sigue que $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$.

b) ¿Se puede aplicar el teorema del valor medio en $[0,2]$?
En caso afirmativo halla el punto (o puntos) de la tesis del teorema.

Si, podemos aplicar el teorema del valor medio en $[0,2]$ a la función $f(x)$ que es continua en $[0,2]$ y derivable en $(0,2)$.
Existe $c \in (0,2)$ tal que $f'(c) = \frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{2}$ y c no puede ser igual a 1, ya que $f'(1) = -1$.

Si $0 < x < 1, f'(x) = -x = -\frac{1}{2}$ para $x = \frac{1}{2}$ y si $1 < x < 2, f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2}$ para $x = \sqrt{2}$.

5) Halla a para que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax} - e^x - x}{x^2}$ sea finito y calcula el valor del límite.
$\lim\limits_{x\to 0} e^a x - e^x - x = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$. Aplicando la regla de l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^a x - e^x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{a e^a x - e^x - 1}{2x}.$$

Ahora, $\lim\limits_{x\to 0} e^a x - e^x - x = a - 2$ y $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$.

Si $a = 2$, se obtiene una nueva forma indeterminada $0/0$ y

$$\lim_{x\to 0} \frac{2e^2 x - e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{4e^2 x - e^x}{2} = \frac{3}{2}.$$

Si $a > 2$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, y $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$.
Si $a < 2$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, y $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$.
El límite existe sólo si $a = 2$.

6) Halla los siguientes límites:
a) $\lim\limits_{x\to 0} ln(\dfrac{e^x - 1}{x})$
$\lim_{x\to 0} ln(\frac{e^x-1}{x}) = ln(\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x})$ y, aplicando la regla de l'Hôpital, $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} e^x = 1$. Se deduce que $\lim_{x\to 0} ln(\frac{e^x-1}{x}) = ln(1) = 0$.
b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - cos(x)}{x^2}$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{x^2}$ es una forma indeterminada del tipo $0/0$.
Aplicando la regla de l'Hôpital, $\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{2x} = \frac{1}{2}$.
c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$
$\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ es una forma indeterminada del tipo 0^0.

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x ln(x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x ln(x)}.$$

Aplicando la regla de l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0^+} xln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0.$$

Se sigue que $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1$.

d) $\lim\limits_{x\to 0} (cosx)^{1/x^2}$

$\lim_{x\to 0}(cosx)^{1/x^2}$ es una forma indeterminada del tipo 1^∞ y $\lim_{x\to 0}(cosx)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{ln(cosx)^{1/x^2}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} ln(cos(x))}$, que es una forma indeterminada del tipo 0/0. Aplicando la regla de l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} ln(cos(x)) = \lim_{x\to 0} -\frac{sen(x)}{x}\frac{1}{2cos(x)} = -\frac{1}{2}.$$

Entonces, $\lim_{x\to 0}(cosx)^{1/x^2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

7) La función $f(x) = 1 - x^{2/3}$ se anula en -1 y 1 y, sin embargo, $f'(x) \neq 0$ en $(-1, 1)$. Explica esta aparente contradicción al teorema de Rolle.

$f(x)$ es continua en $[-1, 1]$ pero no es derivable en $x = 0$.

8) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = e^x + ln(x+1)$ en el punto $(0, 1)$.

$f(0) = 1, \quad f'(x) = e^x + \frac{1}{x+1}, \quad f'(0) = 2.$

La ecuación de la recta tangente por $(0, 1)$ es $y(x) = f'(0)x + f(0) = 2x + 1$.

9) Demuestra la identidad $arctan(x) + arctan(1/x) = -\pi/2, \quad x < 0$.

Sea $f(x) = arctan(x) + arctan(\frac{1}{x})$. Entonces $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}(-\frac{1}{x^2}) = 0$ y $f(x)$ es constante. Siendo $f(-1) = 2arctan(-1) = -\frac{\pi}{2}$, la identidad está verificada.

10) Una cámara de televisión está situada en la tierra a una distancia de 4000 pies de la base de lanzamiento de una astronave. La astronave sube verticalmente y su velocidad es 600 pies/s cuando ha subido 3000 pies.

a) Halla la tasa de cambio de la distancia entre la astronave y la cámara en ese instante,

Sean (ver Figura 9.2) $\bar{AB} = y(t), \bar{BC} = 4000, \bar{AC} = x(t)$, alfa$=\alpha$.

Entonces $y^2(t) = (4000)^2 + x^2(t)$ y $2y(t)y'(t) = 2x(t)x'(t)$. Se sigue que $y'(t) = \frac{x(t)x'(t)}{y(t)}$. Cuando $x(t) = 3000$ pies, $x'(t) = 600$ pies/s, es $y(t) = \sqrt{16 \cdot 10^6 + 9 \cdot 10^6} = 5 \cdot 10^3$ e $y'(t) = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^2}{5 \cdot 10^3} = 360$ pies/s.

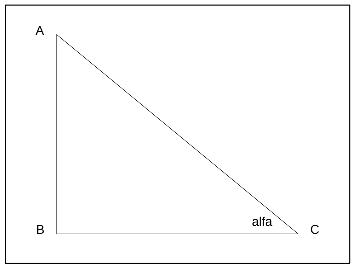


Figura 9.2: A=astronave, B=base de lanzamiento, C=cámara, alfa=ángulo α

b) Si la cámara está siempre enfocada en la astronave, ¿cuál es la tasa de cambio del ángulo de elevación en ese instante?

$cos(\alpha(t)) = \frac{4000}{y(t)}$ y $sen(\alpha(t)) = \frac{x(t)}{y(t)}$, derivando la primera expresión se obtiene: $-sen(\alpha(t))\alpha'(t) = -4000\frac{y'(t)}{y^2(t)} \Rightarrow \alpha'(t) = \frac{y'(t)}{y^2(t)}\frac{4000}{sen(\alpha(t))} = \frac{4000y'(t)}{y^2(t)}\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{4000y'(t)}{y(t)x(t)} = \frac{48\cdot 10^{-2}}{5}$ rad/s.

11) Un objeto se mueve de forma tal que su velocidad v está relacionada a su desplazamiento s por medio de la ecuación $v = \sqrt{2gs+c}$, donde g y c son constantes. Verifica que la aceleración del objeto es constante.

$a(t) = \frac{2gs'(t)}{2\sqrt{2gs(t)+c}} = \frac{2gv(t)}{2v(t)} = g$.

12) Calcula el polinomio de Taylor de grado $n = 3$ en el origen de la función $f(x) = e^x\, ln(1-x)$.

$f(x) = e^x ln(1-x)$, $\quad f'(x) = e^x ln(1-x) - \frac{e^x}{1-x} = f(x) - e^x\frac{1}{1-x}$,

$$f^{(2)}(x) = f'(x) - e^x\frac{1}{1-x} - e^x\frac{1}{(1-x)^2} = f'(x) - e^x\frac{2-x}{(1-x)^2},$$

$$f^{(3)} = f^{(2)} - e^x\frac{2-x}{(1-x)^2} - e^x\frac{-(1-x)^2+(2-x)2(1-x)}{(1-x)^4}.$$

Entonces, $f(0) = 0, f'(0) = -1, f^{(2)}(0) = -3, f^{(3)}(0) = -8$ y

$$P_3(f,0) = -x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3.$$

13) Escribe la fórmula de Taylor de orden n alrededor del punto $a = -1$ de la función $f(x) = 1/x$.

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f'(x) = -x^{-2}, \quad f^{(2)}(x) = 2x^{-3}, \quad f^{(3)}(x) = -6x^{-4}.$
En general,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\, x^{-(n+1)} \quad \text{y} \quad f(-1) = -1, \quad f^{(n)}(-1) = -n!.$$

Por tanto, $P_n(f,-1) = -\sum_{k=0}^{n}(x+1)^k$.

14) Representa gráficamente la función

$$f(x) = \begin{cases} |2x+1| & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 4 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x-1 & \text{si}\, x < -\frac{1}{2}, \\ 2x+1 & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ x^2 - 2x + 4 & \text{si}\, x > 1. \end{cases}$$

El dominio de $f(x)$ es $\mathbb{R}$, $\quad lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$.
$f(x)$ no es derivable en $x = -\frac{1}{2}$ ya que la función $|x|$ no es derivable en $x = 0$.
Es continua en $x = 1$ ya que $lim_{x \to 1^-} 2x+1 = 3 = f(1) = lim_{x \to 1^+} x^2 - 2x + 4$.
$lim_{x \to 1^-} \frac{2x+1-3}{x-1} = 2$, y $lim_{x \to 1^+} \frac{x^2-2x+4-3}{x-1} = 0$. Se sigue que $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 1\}$ y

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si}\, x < -\frac{1}{2}, \\ 2 & \text{si } -\frac{1}{2} < x < 1, \\ 2x - 2 & \text{si}\, x > 1. \end{cases}$$

Siendo $f'(x) \neq 0$, los únicos puntos críticos son $-\frac{1}{2}$ y 1.

$f'(x) < 0$ en $(-\infty, -\frac{1}{2})$ y $f'(x) > 0$ en $(-\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \infty)$. Por tanto $x = -\frac{1}{2}$ es un mínimo relativo.

$f^{(2)}(x)$ es siempre nonegativa. Entonces $f(x)$ es siempre convexa.

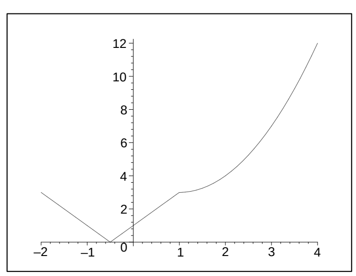


Figura 9.3: Gráfica de $f(x)$

BASES DE MATEMÁTICAS

Soluciones de la HOJA 5

2001-2002

---

1) Calcula las siguientes integrales indefinidas:
a) $\int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3} + C$
b) $\int cos(2x+1)\,dx = \frac{sen(2x+1)}{2} + C$
c) $\int sec^2(x)\,dx = tan(x) + C$
d) $\int cosec^2(x)\,dx = -cotan(x) + C$
e) $\int cosec(x)cotan(x)\,dx = -cosec(x) + C$
f) $\int cotan(x)\,dx = ln|sen(x)| + C$
g) $\int f'(x)sec(f(x))tan(f(x))\,dx = sec(f(x)) + C$
h) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}\,dx = arcsen(f(x)) + C$

2) Para todo $n \in \mathbb{N}$ sea

$$I_n = \int x^n e^{-x} dx.$$

Verifica que

$$I_{n+1} = -x^{n+1}e^{-x} + (n+1)I_n$$

y calcula $\int x^4 e^{-x} dx$.
$\forall n \in \mathbb{N}\ I_n = \int x^n e^{-x}\,dx$, ahora integrando por partes I_{n+1} obtenemos:

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int x^{n+1}e^{-x}\,dx = -x^{n+1}e^{-x} + \int (n+1)x^n e^{-x}\,dx \\ &= -x^{n+1}e^{-x} + (n+1)I_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int x^4e^{-x}\,dx = -x^4e^{-x}+4I_3 = -x^4e^{-x}+4(-x^3e^{-x}+3I_2)\\
&= -x^4e^{-x}-4x^3e^{-x}+12(-x^2e^{-x}+2I_1)\\
&= -x^4e^{-x}-4x^3e^{-x}-12x^2e^{-x}+24(-xe^{-x}+\int e^{-x}\,dx)\\
&= -e^{-x}(x^4+4x^3+12x^2+24x+24)+C
\end{aligned}$$

3) Calcula las siguientes integrales indefinidas:
a)

$$\int sen^3(x)cos(x)\,dx = \int t^3\,dt = \frac{t^4}{4}+C = \frac{sen^4(x)}{4}+C,$$

donde $t = sen(x)$ y $\frac{dt}{dx} = cos(x)$.
b)

$$\begin{aligned}
\int sen^2(x)cos^2(x)\,dx &= \int \frac{1-cos(2x)}{2}\frac{1+cos(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{4}\int 1-cos^2(2x)\,dx\\
&= \frac{1}{4}\int sen^2(2x)\,dx = \frac{1}{4}\int\frac{1-cos(4x)}{2}\,dx\\
&= \frac{1}{8}(x-\frac{sen(4x)}{4})+C.
\end{aligned}$$

4) Verifica las siguientes identidades:
a)

$$\begin{aligned}
\int \frac{2\sqrt[5]{x}+5\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\,dx &= \int 2x^{-\frac{1}{20}}+5x^{\frac{1}{4}}\,dx\\
&= \frac{40}{19}x^{\frac{19}{20}}+4x^{\frac{5}{4}}+C
\end{aligned}$$

b)

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int e^t\,dt = 2e^{\sqrt{x}}+C$$

donde $t = \sqrt{x}$ y $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

c)

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{dt}{1+t^2} = arctan(e^x) + C$$

donde $t = e^x$ y $dt = e^x dx$

d)

$$\int \frac{x+5}{x+2}\,dx = \int 1 + \frac{3}{x+2} = x + 3ln(|x+2|) + C$$

e)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x-3}} = \int \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-3}}{x-x+3}\,dx = \frac{2}{9}(x^{\frac{3}{2}} - (x-3)^{\frac{3}{2}}) + C$$

f)

$$\int \frac{dx}{x(ln(x))^3} = \int \frac{1}{t^3}\,dt = -\frac{t^{-2}}{2} + C = -\frac{1}{2(ln(x))^2} + C$$

donde $t = ln(x)$ y $dt = \frac{1}{x}dx$.

5) Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a)

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^5-3x^4+23x-12}{x^4+4}\,dx &= \int 5x-3+\frac{3x}{x^4+4}\,dx = \frac{5}{2}x^2 - 3x + \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^4+4} \\ &= \frac{5}{2}x^2 - 3x + \frac{3}{4}arctan(\frac{x^2}{2}) + C \end{aligned}$$

b)

$$\int \frac{-x^2+2x+1}{x^3+2x^2+x}\,dx = \int \frac{-x^2+2x+1}{x(x+1)^2}\,dx$$

$$\begin{aligned} \frac{-x^2+2x+1}{x(x+1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{Ax^2+2Ax+A+Bx^2+Bx+Cx}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A}{x(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ 2A+B+C = 2 \\ A+B = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1 \\ C = 2 \\ B = -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{-x^2+2x+1}{x(x+1)^2}\,dx &= \int \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}\,dx \\ &= ln(|x|) - 2ln(|x+1|) - \frac{2}{x+1} + C\end{aligned}$$

c)

$$\int 3x^3+4x^2+3x-12x^4+2x^2\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{3x^3+4x^2+3x-1}{x^2(x^2+1)}\,dx$$

$$\begin{aligned}\frac{3x^3+4x^2+3x-1}{x^2(x^2+1)} &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx^3+Dx^2}{x^2(x^2+1)} \\ &= \frac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+Ax+B}{x^2(x^2+1)}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} A+C=3 \\ B+D=4 \\ A=3 \\ B=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} C=0 \\ D=5 \\ A=3 \\ B=-1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int 3x^3+4x^2+3x-12x^4+2x^2\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^2+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}(3ln(|x|) + \frac{1}{x} + 5arctan(x)) + C\end{aligned}$$

6) Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) Integramos por partes,

$$\begin{aligned}\int 5x(3x+5)^{\frac{4}{5}}\,dx &= 5x(\frac{5}{27}(3x+5)^{\frac{9}{5}}) - \frac{25}{27}\int (3x+5)^{\frac{9}{5}}\,dx \\ &= \frac{25}{27}x(3x+5)^{\frac{9}{5}} - \frac{125}{1134}(3x+5)^{\frac{14}{5}} + C\end{aligned}$$

b) Integramos por partes,

$$\begin{aligned}\int x^3e^{x^2}\,dx &= \int x^2(xe^{x^2})\,dx = x^2\frac{e^{x^2}}{2} - \int 2x\frac{e^{x^2}}{2}\,dx \\ &= \frac{x^2e^{x^2}}{2} - \int xe^{x^2}\,dx = \frac{x^2e^{x^2}}{2} - \frac{e^{x^2}}{2} + C\end{aligned}$$

c) En este problema vamos a integral por parte dos veces

$$\begin{aligned}\int arcsen^2(x)\,dx &= xarcsen^2(x) - \int \frac{2xarcsen(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= xarcsen^2(x) + 2arcsen(x)\sqrt{1-x^2} - 2\int dx \\ &= xarcsen^2(x) + 2arcsen(x)\sqrt{1-x^2} - 2x + C\end{aligned}$$

7) Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}}},$$

ahora hacemos el cambio de variable $t = x^{\frac{1}{6}} \Rightarrow dt = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}} \Rightarrow dx = 6t^5dt$ y obtenemos:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}}} &= 6\int \frac{t^5}{t^3-t^2}\,dt = 6\int \frac{t^3}{t-1}\,dt = 6\int t^2+t+1+\frac{1}{t-1}\,dt \\ &= 6(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+ln(|t-1|)) + C = 6(\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{\sqrt[3]{x}}{2}+\sqrt[6]{x}+ln(\sqrt[6]{x}-1)) + C\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{e^x-1} &= \int \frac{dt}{(t+1)t} = \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\,dt = ln(|t|) - ln(|t+1|) + C \\ &= ln|e^x-1| - x + C\end{aligned}$$

Para resolver la integral hicimos el cambio de variable $t = e^x - 1 \Rightarrow dt = e^xdx \Rightarrow dx = \frac{dt}{t+1}$

c)

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}x^2\,dx,$$

ahora hacemos el cambio de variable $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow dt = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dt$ y obtenemos:

$$\int \frac{t^2-1}{t}t\,dt = \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \sqrt{x^2+1} + C$$

d)

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{t}{(t^2+1)t}dt = arctan(\sqrt{x^2-1}) + C$$

donde $t = \sqrt{x^2-1}$ y $dt = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$.

e)

$$\int \frac{ln(ln(x))}{xln(x)}dx = \int \frac{ln(t)}{t}\,dt = \frac{ln^2(t)}{2} + C = \frac{ln^2(ln(x))}{2} + C$$

donde $t = ln(x)$ y $dt = \frac{1}{x}dx$

f)

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dt = 2\int te^t = 2te^t - \int 2e^t\,dt = 2te^t - 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C$$

donde $t = \sqrt{x}$ y $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow dx = 2tdt$

g)

$$\int \frac{sen^3(x)}{1+cos^2(x)}\,dx = \int -\frac{sen^2(x)}{1+cos^2(x)}(-sen(x))\,dx = \int \frac{cos^2(x)-1}{1+cos^2(x)}(-sen(x))\,dx,$$

ahora hacemos el cambio de variable $t = cos(x) \Rightarrow dt = -sen(x)dx$ y obtenemos:

$$\begin{aligned}\int \frac{cos^2(x)-1}{1+cos^2(x)}(-sen(x))\,dx &= \int \frac{t^2-1}{t^2+1}\,dt = \int 1 - \frac{2}{t^2+1}\,dt \\ &= t - 2arctan(t) + C = cos(x) - 2arctan(cos(x)) + C\end{aligned}$$

8) El área comprendida entre las gráficas de dos funciones continuas y las de rectas $x = a$ y $x = b$ es igual a

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

a) Halla el área comprendida entre la gráfica de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$

b) Halla el área comprendida entre la gráfica $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1$ y su recta tangente en el punto $x = 0$.

a)

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

Los puntos (x, y) de intersección de las dos gráficas son tales que:

$$x^2 = \sqrt{x} \Rightarrow x^4 = x \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 1$$

Como en el intervalo $[0, 1]$ se verifica que $\sqrt{x} \geq x^2$,

$$A = \int_0^1 |x^2 - \sqrt{x}|\, dx = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2\, dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

b) La recta tangente a $f(x)$ en $x = 0$ tiene ecuación igual a $y = f'(0)x + f(0)$,

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 4x - 1 \Rightarrow f'(0) = -1$$

además $f(0) = 1$, por tanto $y = -x + 1$.

Los puntos de intersección de las dos gráficas son $(0, 1)$ y (x, y) tales que

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1 = -x + 1 &\Rightarrow x^4 - 3x^3 + 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 3x + 2) = 0 \\ &\Rightarrow x^2(x-1)(x-2) \Rightarrow x = 0,\ x = 1,\ x = 2 \end{aligned}$$

En $[0, 1]$, $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1 \geq -x + 1$ y en $[1, 2]$, $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1 \leq -x + 1$. Entonces

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 |x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1 - (-x + 1)|\, dx = \int_0^1 x^4 - 3x^3 + 2x^2\, dx + \\ &+ \int_1^2 -x^4 + 3x^3 - 2x^2\, dx = \frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\Big|_0^1 + (-\frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3})\Big|_1^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

9) Calcula el siguiente límite asociándolo a alguna integral definida:

$$\lim_{n\to\infty}[\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \frac{n}{n^2+9} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}].$$

$$\begin{aligned} \lim\nolimits_{n\to\infty} \quad & [\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + ... + \frac{n}{n^2+n^2}] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^2+k^2} \\ = \quad & \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}. \end{aligned}$$

Esta es una suma de Riemann para la función integrable $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ asociada a la partición uniforme $P_n = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., 1)$ del intervalo $[0,1]$ y a los puntos $(c_1, c_2, ..., c_n) = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n}{n})$. Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = arctan(x)|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

10) Deriva la siguiente función:

$$F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{e^t}{t} dt, \qquad x \neq 0.$$

Por el TFCI, siendo $\frac{e^t}{t}$ continua si $t \neq 0$,

$$F'(x) = \frac{e^{x^3}}{x^3} 3x^2 - \frac{e^{x^2}}{x^2} 2x = \frac{3e^{x^3}}{x} - \frac{2e^{x^2}}{x^2}$$

11) Si la función $g(t)$ viene definida mediante la ecuación

$$t = \int_1^{|g(t)|^2} \frac{sen(x)}{x} dx \qquad g(t) \neq 0,$$

calcula $g'(t)$ en términos de $g(t)$ y $(g^{-1})'(x)$.

$$t = \int_1^{g(x)^2} \frac{sen(x)}{x}\, dx$$

Derivando la ecuación se tiene

$$1 = \frac{sen(g^2(t))}{g^2(t)} 2g(t)g'(t) = 2\frac{sen(g^2(t))}{g(t)} g'(t)$$

Entonces

$$g'(t) = \frac{g(t)}{2sen(g^2(t))}$$

Ahora,

$$(g^{-1})'(t) = \frac{1}{g'(g^{-1}(t))} = \frac{2sen(g^2(g^{-1}(t)))}{g(g^{-1}(t))} = \frac{2sen(t^2)}{t}$$

12) Estudia la convergencia de las integrales impropias siguientes:
a)
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\,dx = \int_{-\infty}^{c} e^{-x}\,dx + \int_{c}^{\infty} e^{-x}\,dx, \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{c} e^{-x}\,dx &= \lim_{d\to-\infty}\int_{d}^{c} e^{-x}\,dx = \lim_{d\to-\infty}(-e^{-x})\Big|_{d}^{c}\\ &= \lim_{d\to-\infty}(-e^{-c}+e^{-d}) = \infty\end{aligned}$$

La integral diverge.
b)

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1} ln(x)\,dx &= \lim_{c\to0^+}\int_{c}^{1} ln(x)\,dx = \lim_{c\to0^+}\left[xln(x)|_c^1 - \int_{c}^{1} 1\,dx\right] = \lim_{c\to0^+}[-cln(c)-1+c]\\ &= \lim_{c\to0^+}\frac{-ln(c)}{\frac{1}{c}} - 1 = \lim_{c\to0^+}\frac{-\frac{1}{c}}{-\frac{1}{c^2}} - 1 = \lim_{c\to0^+} c - 1 = -1\end{aligned}$$

La integral converge.
c)
$$\int_{0}^{\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+5}}\,dx = \lim_{c\to\infty}\int_{0}^{c}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+5}}\,dx$$

$$\begin{aligned}\int_{0}^{c}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+5}}\,dx &= \int_{\sqrt[3]{5}}^{\sqrt[3]{c^2+5}}\frac{3}{2}\frac{t^2}{t}\,dt = \frac{3}{4}t^2\Big|_{\sqrt[3]{5}}^{\sqrt[3]{c^2+5}}\\ &= \frac{3}{4}[(c^2+5)^{\frac{2}{3}} - 5^{\frac{2}{3}}]\end{aligned}$$

Para resolver la integral hicimos el cambio de variables $t = \sqrt[3]{x^2+5} \Rightarrow dt = \frac{1}{3}(x^2+5)^{-\frac{2}{3}}2xdx \Rightarrow xdx = \frac{3}{2}t^2dt$
Como
$$\lim_{c\to\infty}\frac{3}{4}[(c^2+5)^{\frac{2}{3}} - 5^{\frac{2}{3}}] = \infty$$
la integral diverge.

Parte IV

Soluciones de los exámenes

Capítulo 10

Soluciones de los exámenes 1999-2000

Universidad
Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas (1999-2000)

Soluciones del examen de nivel

---

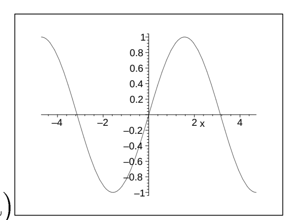
1) Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales y sean A y B los dos conjuntos definidos por:

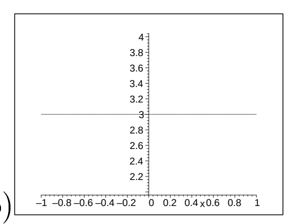
$$A = \{x \in \mathbb{N} : x^2 + 2x - 3 = 0\} \text{ y } B = \{-3, -1, 0\}.$$

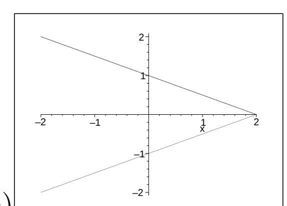
Se verifica que:
a) $A \cup B = \{-3, -1, 1\}$
b) $A \subseteq B$
c) $A \cap B = \{1\}$
d) $A \backslash B = \{1\}$
La respuesta verdadera es la d): el conjunto de los elementos de A que no son elementos de B es $\{1\}$.

2)¿Cuáles de las siguientes figuras son el grafo de una función de la variable x?

¿Cuáles son el grafo de una función inyectiva? (Responder debajo de cada gráfica una de las siguientes opciones: FUNCIÓN , NO ES FUNCIÓN, FUNCIÓN INYECTIVA).

a) 

b) 

c) 

a) FUNCIÓN b) FUNCIÓN c) NO ES FUNCIÓN

3) Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y sea $C = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| < 2\}$.

Se verifica que:
a) $C = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
b) $C = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$
c) $C = (-\infty, \sqrt{3})$
d) $C = (-\sqrt{3}, \infty)$

La respuesta verdadera es la a): $|x^2 - 1| < 2 \iff -2 < x^2 - 1 < 2 \iff -1 < x^2 < 3 \iff |x| < \sqrt{3}$.

4) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $(n \geq 1)$.
Se verifica que:
a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -1$
b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ no existe
c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$
d) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$

La respuesta verdadera es la c): $0 \leq |x_n| = \frac{1}{n}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

5) Para todo número real x, sea $f(x) = (x^2 - 1)^3$. Si $Df(x)$ es la función derivada de $f(x)$, se verifica que:
a) $Df(x) = 3(2x - 1)^2$
b) $Df(x) = 6x(x^2 - 1)^2$
c) $Df(x) = 3(x^2 - 1)$
d) $Df(x) = (x^2 - 1)^2$
La respuesta verdadera es la b): por la regla de la cadena,
$Df(x) = 3(x^2 - 1)^2 2x = 6x(x^2 - 1)^2$.

6) Sea $I = \int_0^1 x^4 - \frac{1}{5}\ dx$.
Se verifica que:
a) $I = \frac{4}{5}$
b) $I = 0$
c) $I = \frac{2}{15}$
d) $I = \frac{6}{5}$
La respuesta verdadera es la b):
$I = \int_0^1 x^4 - \frac{1}{5}\ dx = [\frac{x^5}{5} - \frac{1}{5}x]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = 0$.

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

(Informática de Gestión) *Soluciones del Primer Examen Parcial A*
Fecha: 23 de Noviembre de 1999 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por siete problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

*Hemos incluido un último problema, "Bonus ", que se valorará adicionalmente sobre **0,5** puntos.*

1) (1 punto) Sean A,B y C tres conjuntos. Se verifica que $A \cap B \cap C = A \cap B$

a) nunca
b) siempre
c) sólo si $A = B = C$
d) sólo si $A \cup B \subseteq C$
e) sólo si $A \cap B \subseteq C$

La respuesta verdadera es la e) :

para todo conjunto C, $A \cap B \cap C \subseteq A \cap B$ y $A \cap B \subseteq A \cap B \cap C$ si y sólo si todo elemento de $A \cap B$ es también elemento de C, es decir, si y sólo si $A \cap B \subseteq C$.

2) (1 punto) Sean $A = \{a,b,c,d,e\}$, $\mathbb{N}_6 = \{1,2,3,4,5,6\}$ y

$$\begin{array}{ccc} f : A & \longmapsto & \mathbb{N}_6 \\ a & \longmapsto & 2 \\ b & \longmapsto & 4 \\ c & \longmapsto & 3 \\ d & \longmapsto & 1 \\ e & \longmapsto & 5 \end{array}$$

Se verifica que :

a) f no es una función

b) f es una función inyectiva

c) f es una función sobreyectiva

d) no existe $g:\ \mathbb{N}_6 \longmapsto$ A tal que $g \circ f = Id_A$

e) $f^{-1}(\{6\}) = \{\varnothing\}$

La respuesta verdadera es la b):

cada elemento del dominio tiene una única imagen y se puede verificar directamente que

si f(x) = f(y), se sigue que x=y.

3) (1 punto) **Definición**: *Sea A un conjunto no vacío. Una* **relación de equivalencia** $\mathcal{R}$ *en A es una relación binaria en A reflexiva, ______________ y _____________.*

Para completar correctamente la definición anterior hace falta añadir las palabras (no teneis que justificar vuestra respuesta):

a) antisimétrica, transitiva

b) no se puede completar la definición correctamente

c) transitiva, simétrica

d) simétrica, total

La respuesta verdadera es la c).

4) (1 punto) Explicar el motivo que hace que la siguiente proposición no sea verdadera.

Proposición: Toda sucesión de números reales acotada es convergente.

Ejemplo : la sucesión $\{\mathrm{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(\text{-}1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada por 1 y es divergente.

5) (2 puntos) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por

$$\begin{cases} a_1 = 1 & \\ a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 5) & \forall n \geq 1 \end{cases}.$$

Se verifica que :

a) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada por arriba por 2 y converge al valor $\frac{5}{2}$
b) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada por arriba por 3 y converge al valor $\frac{5}{2}$
c) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada por arriba por 3 y converge al valor 3
d) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y converge a $\frac{5}{2}$

La respuesta verdadera es la b) .
1) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada por arriba por 3 (por inducción):
$a_1 = 1 \leq 3$ y si $a_n \leq 3$, se sigue que $a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 5) \leq \frac{1}{3}(3 + 5) = \frac{8}{3} \leq 3$.
2) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente (por inducción):

$a_2 = 2 \geq a_1$ y si $a_{n+1} \geq a_n$, se sigue que $a_{n+2} = \frac{1}{3}(a_{n+1} + 5) \geq \frac{1}{3}(a_n + 5) = a_{n+1}$.
Entonces $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. Sea $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
Ya que $a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 5) \quad \forall n \geq 1, \qquad a = \frac{1}{3}(a + 5)$ y $a = \frac{5}{2}$.

6) (2 puntos) Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(1 + \frac{1}{n})^{-\frac{n}{6}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\frac{5^n}{(n+3)!}\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Se verifica que :
a) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente
b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt[6]{e}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$
c) $\log_e(\lim\limits_{n\to\infty} a_n) = -\frac{1}{6}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$
d) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente

La respuesta verdadera es la c):

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^{-\frac{n}{6}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[6]{\dfrac{1}{(1 + \frac{1}{n})^n}} = \sqrt[6]{e^{-1}} = e^{\frac{-1}{6}}$, entonces $\log_e(\lim\limits_{n\to\infty} a_n) = -\frac{1}{6}$

$\forall n \geq 1,\ b_n > 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^{n+1}}{(n+4)!} \frac{(n+3)!}{5^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5}{n+4} = 0 < 1.$
Por el criterio del cociente, $_{n\to\infty}\ b_n = 0$.

7) (2 puntos) Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ acotados. Entonces,

a) $A \cup B$ está acotado y $\sup(A \cup B) = max\{\sup(A), \sup(B)\}$
b) $A \cap B$ está acotado y $\sup(A \cap B) = max\{\sup(A), \sup(B)\}$
c) en general, $A \cup B$ no está acotado

d) en general, $A \cap B$ no está acotado

La respuesta verdadera es la a).

Sean C_1 y C_2 dos constantes positivas tales que $\forall a \in A, \mid a \mid \leq C_1$ y $\forall b \in B, \mid b \mid \leq C_2$. Entonces $\forall x \in A \cup B$, $\mid x \mid \leq max\{C_1, C_2\}$ y $A \cup B$ está acotado.

Además,

1) ya que $sup(A)$ es una cota superior de A y $sup(B)$ es una cota superior de B,

$max\{\sup(A), \sup(B)\}$ es una cota superior de $A \cup B$.

2) $y < max\{\sup(A), \sup(B)\} \Longrightarrow y < \sup(A)$ ó $y < \sup(B) \Longrightarrow \exists a \in A$ tal que $y < a$ ó $\exists b \in B$ tal que $y < b \Longrightarrow \exists x \in A \cup B$ tal que $y < x$.

Se sigue que $\sup(A \cup B) = max\{\sup(A), \sup(B)\}$.

Bonus:(0.5 puntos) Si x e y son números racionales, se verifica que $x + y$ y xy son números racionales

a) siempre
b) nunca
c) en general, $x + y$ no es racional
d) en general, xy no es racional

La respuesta verdadera es la a).

Sean $x = \frac{p_1}{q_1}$ e $y = \frac{p_2}{q_2}$ $(p_1, p_2 \in \mathbb{Z},\ q_1, q_2 \in \mathbb{Z} - \{0\})$.

Entonces, $x + y = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}$ es racional, pués que $p_1 q_2 + p_2 q_1 \in \mathbb{Z}$ y $q_1 q_2 \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Además, $xy = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}$ es también racional, pués que $p_1 p_2 \in \mathbb{Z}$ y $q_1 q_2 \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

Informática de Sistemas (tarde) *Soluciones del Primer Examen Parcial A*
Fecha: 23 de Noviembre de 1999 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por siete problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

*Hemos incluido un último problema, "Bonus ", que se valorará adicionalmente sobre **0,5** puntos.*

1) (1 punto) **Definición***: Sea A un conjunto no vacío. Una* **relación de orden** $\mathcal{R}$ *en A es una relación binaria en A* _____________ , _____________ *y transitiva.*

Para completar correctamente la definición anterior hace falta añadir las palabras (no teneis que justificar vuestra respuesta):

a) no se puede completar la definición correctamente
b) antisimétrica, reflexiva
c) reflexiva, simétrica
d) reflexiva, total

La respuesta verdadera es la b).

2) (1 punto) Explicar el motivo que hace que la siguiente proposición no sea verdadera.

Proposición: Toda sucesión de números reales acotada es de Cauchy.

Ejemplo : la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada por 1 y es divergente, entonces no puede ser de Cauchy.

3) (1 punto) Sean A,B y C tres conjuntos. Se verifica que $A \cup B \cup C = A \cup B$

a) nunca
b) siempre
c) sólo si A ∪ B ⊆ C
d) sólo si C ⊆ A ∪ B
e) sólo si A ∪ B = C

La respuesta verdadera es la d):
para todo conjunto C, A ∪ B ⊆ A ∪ B ∪ C y A ∪ B ∪ C ⊆ A ∪ B si y sólo si todo elemento de C es también elemento de A ∪ B, es decir, si y sólo si C ⊆ A ∪ B.

4) (1 punto) Sean f, g, h las tres funciones de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ definidas por

$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = 6x, \quad h(x) = x + 6.$$

Se verifica que :
a) $g \circ f = f \circ g$
b) $g \circ h = h \circ g$
c) f, g y h son todas inyectivas
d) f, g y h son todas sobreyectivas
e) $g^{-1}(\{3\}) = \{\emptyset\}$
La respuesta verdadera es la c):
$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x + 1 = y + 1 \Leftrightarrow x = y$
$g(x) = g(y) \Leftrightarrow 6x = 6y \Leftrightarrow x = y$
$h(x) = h(y) \Leftrightarrow x + 6 = y + 6 \Leftrightarrow x = y$

5) (2 puntos) Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ acotados. Entonces,
a) $A \cup B$ está acotado y $inf(A \cup B) = min\{inf(A), inf(B)\}$
b) $A \cap B$ está acotado y $inf(A \cap B) = min\{inf(A), inf(B)\}$
c) en general, $A \cup B$ no está acotado
d) en general, $A \cap B$ no está acotado
La respuesta verdadera es la a).
Sean C_1 y C_2 dos constantes positivas tales que $\forall a \in A, \mid a \mid \leq C_1$ y $\forall b \in B, \mid b \mid \leq C_2$. Entonces $\forall x \in A \cup B$, $\mid x \mid \leq max\{C_1, C_2\}$ y $A \cup B$ está acotado.
Además,

1) ya que $inf(A)$ es una cota inferior de A y $inf(B)$ es una cota inferior de B, $min\{inf(A), inf(B)\}$ es una cota inferior de $A \cup B$.

2) $y > min\{inf(A), inf(B)\} \Longrightarrow y > inf(A)$ ó $y > inf(B) \Longrightarrow \exists a \in A$ tal que $y > a$ ó $\exists b \in B$ tal que $y > b \Longrightarrow \exists x \in A \cup B$ tal que $y > x$.

Se sigue que $inf(A \cup B) = min\{inf(A), inf(B)\}$.

6) (2 puntos) Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(1 + \frac{1}{(\frac{n}{2})})^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\frac{3^n}{n!}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Se verifica que :

a) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

b) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente

c) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente

d) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

La respuesta verdadera es la d):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (1 + \tfrac{1}{(\frac{n}{2})})^n = \lim_{n\to\infty} \left[(1 + \frac{1}{(\frac{n}{2})})^{\frac{n}{2}}\right]^2 = e^2.$$

$$\forall n \geq 1,\ b_n > 0 \text{ y } \lim_{n\to\infty} \tfrac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\ \tfrac{n!}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1.$$

Por el criterio del cociente, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

7) (2 puntos) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por

$$\begin{cases} a_1 = 1 & \\ a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 7) & \forall n \geq 1 \end{cases}.$$

Se verifica que :

a) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada por arriba por 2 y converge al valor $\frac{7}{3}$

b) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada por arriba por 3 y converge al valor $\frac{7}{3}$

c) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada por arriba por 3 y converge al valor 3

d) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$es decreciente y converge a $\frac{7}{3}$

La respuesta verdadera es la b) .

1) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada por arriba por 3 (por inducción):

$a_1 = 1 < 3$ y si $a_n \leq 3$, se sigue que $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 7) \leq \frac{1}{4}(3 + 7) = \frac{10}{4} < 3$.

2) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente (por inducción):

$a_2 = 2 \geq a_1$ y si $a_{n+1} \geq a_n$, se sigue que $a_{n+2} = \frac{1}{4}(a_{n+1} + 7) \geq \frac{1}{4}(a_n + 7) = a_{n+1}$.

Entonces $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. Sea $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Ya que $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 7) \quad \forall n \geq 1, \qquad a = \frac{1}{4}(a + 7)$ y $a = \frac{7}{3}$.

Bonus:(0.5 puntos) Si x e y son números irracionales, se verifica que $x + y$ y xy son números irracionales

a) siempre
b) nunca
c) $x + y$ no es necesariamente irracional
d) xy es siempre irracional

La respuesta verdadera es la c).

Sean $x = \sqrt{2}$ e $y = -\sqrt{2}$. Entonces, $x + y = 0$ es racional.

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

Informática de Gestión *Soluciones del Segundo Examen Parcial A*
Fecha: 12 de Enero de 2000 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por ocho problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

*Hemos incluido un último problema, "Bonus ", que se valorará adicionalmente sobre **0,5** puntos.*

1) (1 punto) Sea a un número real positivo. Utiliza el teorema del valor intermedio para demostrar que existe un número positivo x tal que $x^2 = a$. (Es decir, para demostrar la existencia de la raíz cuadrada de a).

La función f(x)=x^2 es continua en [0,∞) y $f(0) = 0 < a$, $f(a+1) = (a+1)^2 = a^2 + 2a = 1 > a$. por el teorema del valor intermedio, existe $x_0 \in (0, a+1)$ tal que $f(x_0) = x_0^2 = a$.

2) (1 punto) Sea $g : (-1, 2) \longmapsto \mathbb{R}$ una función tal que $\forall x \in (-1, 2)$ $|g(x)| \leq \frac{1}{4}$ y sea $f : (-1, 2) \longmapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 g(x)$. Halla $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Para todo $x \in (-1, 2)$, $|f(x)| = |x^2 g(x)| = x^2 |g(x)| \leq \frac{x^2}{4}$.

Entonces $\forall x \in (-1, 2)$, $-\frac{x^2}{4} \leq f(x) \leq \frac{x^2}{4}$. Aplicando el teorema del sandwich se obtiene que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

3) (1 punto) Completa la siguiente

Definición. *Sean A un subconjunto no vacío de R, $f : A \mapsto R$ una función y x_0 un punto de acumulación de A. Entonces* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ *si* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ *tal que para todo* $x \in A$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, $f(x) > \varepsilon$.

4) (1 punto) Sea $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x)-1}{sen(x)} & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ sen(2x) & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

¿Puedes afirmar que f tiene un valor máximo y un valor mínimo en $[-1, 1]$?

La función f es continua en $(0, 1]$, ya que es el cociente de funciones continuas y $sen(x) \neq 0$ en $(0, 1]$. También es continua en [-1,0), ya que es composición de funciones continuas. Además, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} sen(2x) = 0$ y $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\cos(x)-1}{x}}{\frac{sen(x)}{x}} = \frac{0}{1} = 0$. E Entonces $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

El intervalo [-1,1] está acotado y es cerrado, $f(x)$ es continua en [-1,1], se sigue que $f(x)$ tiene máximo y mínimo absolutos.

5) (2 puntos) Sea $f : (1, 3) \longmapsto \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Demuestra que existe la función inversa de f, f^{-1}, y que f^{-1} es continua en $(\frac{1}{2}, \infty)$.

Sean $x, y \in (1, 3)$ tales que $x < y$. Entonces $x - 1 < y - 1$ y $\frac{1}{x-1} > \frac{1}{y-1}$. Se sigue que f es estrictamente decreciente. f es también continua en (1,3) y $f((1, 3)) = (\frac{1}{2}, \infty)$, ya que
$\frac{1}{2} = \lim_{x \to 3^-} f(x)$ y $\infty = \lim_{x \to 1^+} f(x)$.

Por el teorema de la inversa continua, la función $f^{-1} : (\frac{1}{2}, \infty) \to (1, 3)$ es continua.

6) (2 puntos) Utiliza un criterio de convergencia o de divergencia basado en sucesiones para estudiar la existencia de los siguientes límites:

$a)$ $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x + 1}{x + 1}$ $\qquad$ $b)$ $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{2}{1 - x}$

a) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ y $\forall n \geq 1,\ x_n \neq 1$.

Entonces $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n^2 - x_n + 1}{x_n + 1} = \dfrac{1}{2}$. Por el criterio de convergencia basado en sucesiones $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 - x + 1}{x + 1} = \dfrac{1}{2}$.

b) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{1\}$ definida por $\forall n \geq 1,\ x_n = 1 + \frac{1}{n}$.

Entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ y $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{2}{1 - 1 - \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} -2n = -\infty$.

Por el criterio de divergencia basado en sucesiones, $\lim_{x\to 1} \dfrac{2}{1-x}$ no existe.

7) (2 puntos) Sea $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 2 - x & \text{si} \quad 2 < x \leq 3 \\ x - 4 & \text{si} \quad 3 < x < 4 \\ \pi & \text{si} \quad x \geqslant 4 \end{cases}$$

Encuentra los puntos de discontinuidad de g.

g es continua en $(-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, 4) \cup (4, \infty)$ ya que es siempre igual a un polinomio.

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} 2x - x^2 = 0 = g(0) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+} 2 - x = 0,$$

$$\lim_{x\to 3^-} g(x) = \lim_{x\to 3^-} 2 - x = -1 = g(3) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 3^+} g(x) = \lim_{x\to 3^+} x - 4 = -1,$$
$$\lim_{x\to 4^-} g(x) = \lim_{x\to 4^-} x - 4 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 4^+} g(x) = \lim_{x\to 4^+} \pi = \pi = g(4).$$

El único punto de discontinuidad de g es $x = 4$.

Bonus.(0.5 puntos) Contesta verdadero o falso.

Si f es una función definida sobre el intervalo $(0, 5)$ tal que $f(1) > 0$ y $f(3) < 0$, entonces existe un número x entre 1 y 3 con $f(x) = 0$.

FALSO: Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ -1 & \text{si} \quad 2 \leq x < 5 \end{cases}$

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

(Informática de Gestión) *Soluciones del Segundo Examen Parcial B*
Fecha: 12 de Enero del 2000 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por ocho problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

*Hemos incluido un último problema, "Bonus ", que se valorará adicionalmente sobre **0,5** puntos.*

1) (1 punto) Sea $f : [-1,1] \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{sen(x)} & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ \cos(2x) & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

¿Puedes afirmar que f tiene un valor máximo y un valor mínimo en $[-1,1]$?

La función f es continua en (0,1], ya que es el cociente de funciones continuas y $sen(x) \neq 0 \ \forall x \in$ (0,1]. También es continua en [-1,0), ya que es la composición de funciones continuas. Además, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{\frac{sen(x)}{x}} = 1.$

El intervalo [-1,1] está acotado y es cerrado, f es continua en [-1,1], entonces tiene máximo y mínimo absolutos en [-1,1].

2) (1 punto) Completa la siguiente

Definición. *Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y $f : A \mapsto \mathbb{R}$ una función.*

Entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ *si* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ *tal que para todo* $x > \delta(\varepsilon)$ $|f(x) - L| > \varepsilon$. **NOTA:** Se supone que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $(a, \infty) \subseteq A$.

3) (1 punto) Sea $g : (0, \pi) \longmapsto \mathbb{R}$ la función $g(x) = \cos(\frac{1}{2x})$ y sea $f : (0, \pi) \longmapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = xg(x)$. Halla $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Para todo $x \in (0, \pi)$ $|f(x)| = |x||g(x)| \leq |x|$.

Entonces si $x \in (0, \pi)$, $-|x| \leq f(x) \leq |x|$.

Ya que $\lim_{x\to 0} -|x| = 0 = \lim_{x\to 0}|x|$, aplicando el teorema del sandwich se obtiene que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

4) (1 punto) Sea a un número real positivo. Utiliza el teorema del valor intermedio para demostrar que existe un número positivo x tal que $x^2 = a$. (Es decir, para demostrar la existencia de la raíz cuadrada de a).

La función $f(x) = x^2$ es continua en $[0, \infty)$ y $f(0) = 0 < a$, $f(a+1) > a$.

Por el teorema del valor intermedio, existe $x_0 \in (0, a+1)$ tal que $f(x_0) = x_0^2 = a$.

5) (2 puntos) Sea $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} 2x + x^2 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 2 - x & \text{si} \quad 2 < x \leq 3 \\ x - 4 & \text{si} \quad 3 < x < 4 \\ 0 & \text{si} \quad x \geqslant 4 \end{cases}$$

Encuentra los puntos de discontinuidad de g.

g es continua en $(-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, 4) \cup (4, \infty)$ ya que es siempre igual a un polinomio.

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} 2x + x^2 = 8 = g(2) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+} 2 - x = 0,$$

$$\lim_{x\to 3^-} g(x) = \lim_{x\to 3^-} 2 - x = -1 = g(3) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 3^+} g(x) = \lim_{x\to 3^+} x - 4 = -1,$$

$\lim\limits_{x\to 4^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} x - 4 = 0$ y $\lim\limits_{x\to 4^+} g(x) = 0 = g(0)$.
El único punto de discontinuidad de g es $x = 2$.

6) (2 puntos) Utiliza un criterio de convergencia o de divergencia basado en sucesiones para estudiar la existencia de los siguientes límites:

$$a) \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^2+1}{x} \qquad\qquad b) \qquad \lim_{x\to -1} \frac{5}{1+x}$$

a) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ y $\forall n \geq 1,\ x_n \neq 1$. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n^2+1}{x_n} = 2$. Por el criterio de convergencia basado en sucesiones, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+1}{x} = 2$.

b) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\backslash\{1\}$ definida por : $\forall n \geq 1,\ x_n = -1 + \frac{1}{n}$. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5}{1-1+\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} 5n = \infty$.

Por el criterio de divergencia basado en sucesiones, $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{5}{1+x}$ no existe.

7) (2 puntos) Sea $f : (1,3) \longmapsto \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{3}{3-x}$. Demuestra que existe la función inversa de f, f^{-1}, y que f^{-1} es continua en $(\frac{3}{2}, \infty)$.

Sean $x, y \in (1,3)$ tales que $x < y$. Entonces $-x > -y$ y $3-x > 3-y$. Se sigue que $\frac{3}{3-x} < \frac{3}{3-y}$, es decir, que f es estrictamente creciente. f es también continua en $(1,3)$ y $f((1,3)) = (\frac{3}{2}, \infty)$, ya que $\frac{3}{2} = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ y $\infty = \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$.
Por el teorema de la inversa continua, la función $f^{-1} : (\frac{3}{2}, \infty) \to (1,3)$ es continua.

Bonus.(0.5 puntos) Contesta verdadero o falso.

Si f es una función continua definida sobre el intervalo $(0, 5)$ tal que $f(1) > 0$ y $f(3) < 0$, entonces existe un número x entre 1 y 3 con $f(x) = 0$.

VERDADERO por el teorema del valor intermedio.

Universidad
Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas (tarde)) *Soluciones del Segundo Examen Parcial A*
Fecha: 12 de Enero del 2000 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por siete problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

*Hemos incluido un último problema, "Bonus ", que se valorará adicionalmente sobre **0,5** puntos.*

1) (1 punto) Completa la siguiente

Definición. *Sean A un subconjunto no vacío de* $\mathbb{R}$, $f : A \mapsto \mathbb{R}$ una función y x_0 un punto de acumulación de A. *Entonces* $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todo $x \in A$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, $|f(x) - L| < \varepsilon$.

2) (1 punto) Determina si se puede aplicar el teorema del valor intermedio para demostrar que existe una solución de la ecuación $x^4 + 1 = \frac{1}{x}$ en el intervalo $(\frac{1}{2}, 1)$.

La función $f(x) = x^4 + 1 - \frac{1}{x}$ es continua en $[\frac{1}{2}, 1]$ y $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{16} + 1 - 2 < 0$ y $f(1) = 1 > 0$. Poe el teorema del valor intermedio (de la raíz) existe $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$ tal que $f(x_0) = x_0^4 + 1 - \frac{1}{x_0} = 0$. Entonces x_0 es solución de la ecuación $x^4 + 1 = \frac{1}{x}$.

3) (1 punto) Sea $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{[sen(3x)]^2}{x^2} & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 5x^3 - 2x^2 + x + 9 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

¿Puedes afirmar que f tiene un valor máximo y un valor mínimo en $[-1,1]$?

La función f es continua en (0,1], ya que es el cociente de funciones continuas y $x^2 \neq 0$ en (0,1]. También es continua en [-1,0), ya que es un polinomio.

Además, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{sen(3x)}{x}\right]^2 = \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{3sen(3x)}{3x}\right]^2 = 9 \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{sen(3x)}{3x}\right]^2 = 9 = f(0)$.

El intervalo [-1,1] está acotado y es cerrado, f es continua en [-1,1], entonces f tiene máximo y mínimo absolutos en [-1,1].

4) (1 punto) Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, $f, g : A \mapsto \mathbb{R}$ dos funciones y x_0 un punto de acumulación de A. Si $|f(x)| \leq g(x)$ para todo $x \in A$ y $x \to x_0 g(x) = 0$, halla $x \to x_0 f(x)$.

Para todo $x \in A$, $-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$. Ya que $x \to x_0 g(x) = 0 = x \to x_0 - g(x)$,

aplicando el teorema del sandwich se obtiene que $x \to x_0 f(x) = 0$.

5) (2 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si} \quad x < 0 \\ 3 - x & \text{si} \quad 0 \leq x < 3 \\ (x-3)^2 & \text{si} \quad 3 \leq x < 4 \\ 2 & \text{si} \quad x \geqslant 4 \end{cases}$$

Encuentra los puntos de discontinuidad de f.

f es continua en $(-\infty, 0) \cup (0,3) \cup (3,4) \cup (4, \infty)$ ya que está siempre definida igual a un polinomio o a la raíz cuadrada.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \sqrt{-x} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 3 - x = 3 = f(0),$$
$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} 3 - x = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (x-3)^2 = 0 = f(3)$$

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} (x-3)^2 = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} 2 = 2 = f(4).$$

Los puntos de discontinuidad de f son $x = 0$ y $x = 4$.

6) (2 puntos) Sea $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$. Encuentra un subconjunto de los números reales A donde f se pueda expresar como composición de tres funciones continuas.

La función f está definida en $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0, \sqrt{x} \neq 2\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0, x \neq 4\}$. En A,

$f(x) = g(\sqrt{x} - 2) = g(h(\sqrt{x})) = g(h(t(x)))$, donde

$g(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = x - 2$ y $t(x) = \sqrt{x}$.

Para todo $x \in A$, $f = g \circ h \circ t$, donde g, h y t son funciones continuas.

7) (2 puntos) Utiliza un criterio de convergencia o de divergencia basado en sucesiones para estudiar la existencia de los siguientes límites:

$$a) \qquad \lim_{x \to 3} \frac{1}{1 - 3x} \qquad\qquad b) \qquad \lim_{x \to \frac{1}{4}} \frac{3}{4x - 1}$$

a) Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \backslash \{\frac{1}{3}\}$ una sucesión tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 3$ y $\forall n \geq 1$, $x_n \neq 3$.

Entonces $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{1 - 3x_n} = -\dfrac{1}{8}$.

Poe el criterio de convergencia basado en sucesiones, $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{1 - 3x} = -\dfrac{1}{8}$.

b) Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \backslash \{\frac{1}{4}\}$ definida por: $\forall n \geq 1$, $x_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{n}$.

Entonces $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \dfrac{1}{4}$ y $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3}{4(\frac{1}{4} + \frac{1}{n}) - 1} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n}{4} = \infty$.

Por el criterio de divergencia basado en sucesiones, $\lim\limits_{x \to \frac{1}{4}} \dfrac{3}{4x - 1}$ no existe.

Bonus:(0.5 puntos) Sean $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y $h : [2, 3] \to \mathbb{R}$, tres funciones tales que

$f((0, 1)) = (-1, 5) \cup [7, \infty)$, $g([0, \infty)) = (-\infty, 0)$ y $h([2, 3]) = (2, 5)$.

¿Cuál de las funciones f, g ó h seguramente tiene por lo menos un punto de discontinuidad en su dominio?

La función f, ya que no preserva intervalos.

Universidad
Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

Informática de Sistemas (tarde) *Soluciones del Segundo Examen Parcial B*
Fecha: 12 de Enero del 2000 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por siete problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

*Hemos incluido un último problema, "Bonus ", que se valorará adicionalmente sobre **0,5** puntos.*

1) (1 punto) Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, $f, g : A \mapsto \mathbb{R}$ dos funciones y x_0 un punto de acumulación de A. Si $|f(x) - 5| \leq g(x)$ para todo $x \in A$ y $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, halla $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Para todo $x \in A$, $-g(x) \leq f(x) - 5 \leq g(x) \Longrightarrow -g(x) + 5 \leq f(x) \leq g(x) + 5$.

Ya que $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) + 5 = \lim\limits_{x \to x_0} - g(x) + 5 = 5$, aplicando el teorema del sandwich se obtiene que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 5$.

2) (1 punto) Sea $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{[\cos(2x) - 1]^2}{x^2} & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 3x^3 - x^2 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

¿Puedes afirmar que f tiene un valor máximo y un valor mínimo en $[-1, 1]$?

La función f es continua en (0,1], ya que es el cociente de funciones continuas y $x^2 \neq 0$ en (0,1]. También es continua en [-1,0), ya que es un polinomio.

Además, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 3x^3 - x^2 = 0 = f(0)$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left[2\frac{\cos(2x)-1}{2x}\right]^2 =$
$4\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\cos(2x)-1}{2x}\right]^2 = 0.$

f es continua en el intervalo cerrado y acotado [-1,1], entonces tiene máximo y mínimo absolutos en [-1,1].

3) (1 punto) Determina si se puede aplicar el teorema del valor intermedio para demostrar que existe una solución de la ecuación $x^4 - 1 = \frac{1}{2x}$ en el intervalo $(\frac{1}{2}, 2)$.

La función $f(x) = x^4 - 1 - \frac{1}{2x}$ es continua en $[\frac{1}{2}, 2]$ y $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{16} - 1 - 1 < 0$ y $f(2) = 16 - 1 - \frac{1}{4} > 0$.

Por el teorema del valor intermedio (de la raíz), existe $x_0 \in (\frac{1}{2}, 2)$ tal que $f(x_0) = x_0^4 - 1 - \frac{1}{2x_0} = 0$. Entonces x_0 es solución de la ecuación $x^4 - 1 = \frac{1}{2x}$.

4) (1 punto) Completa la siguiente

Definición. *Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, $f : A \mapsto \mathbb{R}$ una función y x_0 un punto de acumulación de A. Entonces $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$ si* $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ *tal que para todo $x \in A$, $-\delta(\varepsilon) < x - x_0 < 0$, $f(x) > \varepsilon$.*

NOTA: se supone que $A \cap (x_0 - \delta(\varepsilon), x_0) \neq \emptyset$.

5) (2 puntos) Utiliza un criterio de convergencia o de divergencia basado en sucesiones para estudiar la existencia de los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{1}{1-2x}$ *b*) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{1}{3}}\frac{2}{1-3x}$

a) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$ una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$ y $\forall n \geq 1, x_n \neq 2$.

Entonces $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-2x_n} = -\frac{1}{3}$.

Por el criterio de covergencia basado en sucesiones $\lim_{x\to 2}\frac{1}{1-2x} = -\frac{1}{3}$.

b) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{3}\}$ definida por: $\forall n \geq 1, x_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{n}$.

Entonces, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{1-3(\frac{1}{3}+\frac{1}{n})} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-2n}{3} = -\infty$.

Por el criterio de divergencia basado en sucesiones, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} \dfrac{2}{1-3x}$ no existe.

6) (2 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 - 3x & \text{si} \quad 0 \leq x < 3 \\ (2x-1)^2 & \text{si} \quad 3 \leq x < 4 \\ 4 & \text{si} \quad x \geqslant 4 \end{cases}$$

Encuentra los puntos de discontinuidad de f.

f es continua en $(-\infty, 0) \cup (0,3) \cup (3,4) \cup (4,\infty)$ ya que está siempre definida igual a un polinomio o a la raíz cuadrada.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{-x} = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 - 3x = 3 = f(0)$,
$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} x^2 - 3x = 0$ y $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (2x-1)^2 = 25 = f(3)$

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} (2x-1)^2 = 49$ y $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} 4 = 4 = f(4)$.

Los puntos de discontinuidad de f son $x = 3$ y $x = 4$.

7) (2 puntos) Sea $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Encuentra un subconjunto de los números reales A donde f se pueda expresar como composición de tres funciones continuas.

La función f está definida en $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. En A,
$f(x) = g(2\sqrt{x}) = g(h(\sqrt{x})) = g(h(t(x)))$, donde
$g(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = 2x$ y $t(x) = \sqrt{x}$.
Para todo $x \in A$, $f = g \circ h \circ t$, donde g, h y t son funciones continuas.

Bonus.(0.5 puntos) Poner un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que no sea continua al menos en un punto $a \in \mathbb{R}$ y tal que su cuadrado, es decir, la función

$$\begin{array}{rccc} f^2 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightsquigarrow & f(x)^2 \end{array}$$

sea continua en todo $\mathbb{R}$.

Sea $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$

f no es continua en $x = 0$, pero $f^2(x) = 1$ es continua en $\mathbb{R}$.

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

Informática de Sistemas y de Gestión *Soluciones del Examen A*
Fecha: 11 de Febrero de 2000

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está compuesto por seis problemas y se valorará sobre 60 puntos.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas. Esta hoja no hace falta entregarla. Tampoco es preciso copiar los enunciados de los problemas en el cuadernillo de examen que entreguêis.

La obtención en esta prueba de una calificación inferior a 21 puntos (el equivalente a 3.5 sobre 10) supondrá una calificación de suspenso *en la asignatura.*

1) (10 puntos) Contesta **VERDADERO** o **FALSO** (en este problema no hace falta justificar tus respuestas).

a) Si x es un número real, entonces $|x-3|>1 \Leftrightarrow x \in (2,4)$. FALSO

b) La función $f(x) = cos(x)$ es inyectiva en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. FALSO

c) Una relación de orden es también una relación de equivalencia. FALSO

d) Toda sucesión creciente y de Cauchy está acotada superiormente. VERDADERO

e) Toda función derivable en (a,b) es continua en (a,b). VERDADERO

2) Calcula las siguientes integrales: a)(5 puntos) $\int_e^\infty \frac{1}{x[\ln(x)]^2}\,dx$ b)(5 puntos) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\,dx$

NOTA: $\ln(x)$ representa el logaritmo neperiano de x.

a) $\int_e^\infty \frac{1}{x[\ln(x)]^2}\,dx = \lim_{c\to\infty} \int_e^c \frac{1}{x[\ln(x)]^2}\,dx.$

Utilizando la sustitución $t=\ln(x), \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$, se obtiene que

$\int_e^c \frac{1}{x[\ln(x)]^2}\ dx = \int_1^{\ln(c)} \frac{1}{e^t t^2} e^t\ dt = \int_1^{\ln(c)} \frac{1}{t^2}\ dt = -\frac{1}{t}\Big|_1^{\ln(c)} = -\frac{1}{\ln(c)} + 1.$
Entonces
$\int_e^{\infty} \frac{1}{x[\ln(x)]^2}\ dx = \lim_{c\to\infty} -\dfrac{1}{\ln(c)} + 1 = 1.$

b) Para la segunda integral se aplica la sustitución $t = \sqrt{x}+2$, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$:
$\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\ dx = \int_3^4 \frac{t-2}{t} 2(t-2)\ dt = 2\int_3^4 \frac{t^2-4t+4}{t} dt = 2\int_3^4 t - 4 + \frac{4}{t} dt =$
$= 2[\frac{t^2}{2} - 4t + 4\ln(t)]_3^4 = 2[8 - 16 + 4\ln(4) - \frac{9}{2} + 12 - 4\ln(3)] =$
$= 2[-\frac{1}{2} + 4\ln(\frac{4}{3})] = 8\ln(\frac{4}{3}) - 1.$

3) (8 puntos) Calcula el polinomio de Taylor $P_3(x)$ de orden 3 de la función

$$f(x) = xsen(\frac{x}{2})$$

en un entorno del punto $x_0 = 0$.

$f^{(1)}(x) = sen(\frac{x}{2}) + \frac{1}{2}x\ \cos(\frac{x}{2}),$
$f^{(2)}(x) = \frac{1}{2}\cos(\frac{x}{2}) + \frac{1}{2}\left[\cos(\frac{x}{2}) - \frac{1}{2}xsen(\frac{x}{2})\right] = \cos(\frac{x}{2}) - \frac{1}{4}xsen(\frac{x}{2}),$
$f^{(3)}(x) = -\frac{1}{2}sen(\frac{x}{2}) - \frac{1}{4}[sen(\frac{x}{2}) + \frac{x}{2}\cos(\frac{x}{2})] = -\frac{3}{4}sen(\frac{x}{2}) - \frac{x}{8}\cos(\frac{x}{2}).$
Entonces
$P_3(x) = 0 + 0\cdot x + 1\cdot\frac{x^2}{2} + 0\cdot\frac{x^3}{6} = \frac{x^2}{2}.$

4) a)(8 puntos) Determina los puntos de extremos relativos y los intervalos de monotonía, convexidad y concavidad de la función $f(x) = x^5 - x$ en $[-2, \infty)$.

Respuesta: Tenemos $f'(x) = 5x^4 - 1$ y $f''(x) = 20x^3$. Estudiemos la primera derivada.

$$\begin{cases} f'(x) = 0 & \text{si} \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{5}}, \\ f'(x) < 0 & \text{si} \quad x \in (-\frac{1}{\sqrt[4]{5}}, \frac{1}{\sqrt[4]{5}}) \\ f'(x) = 0 & \text{si} \quad x \in [-2, -\frac{1}{\sqrt[4]{5}}) \cup (\frac{1}{\sqrt[4]{5}}, \infty). \end{cases}$$

Veamos cuanto vale la segunda derivada en los puntos críticos. $f''(-\frac{1}{\sqrt[4]{5}}) = 20(-\frac{1}{\sqrt[4]{5}})^3 < 0.$

Por lo tanto $-\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ es un punto de máximo local. $f''(\frac{1}{\sqrt[4]{5}}) = 20(\frac{1}{\sqrt[4]{5}})^3 > 0.$ Por lo tanto $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ es un punto de mínimo local. Ahora estudiamos la monotonía: f$'(x) < 0$ si $x \in (-\frac{1}{\sqrt[4]{5}}, \frac{1}{\sqrt[4]{5}})$ y $f'(x) > 0$ si $x \in [-2, -\frac{1}{\sqrt[4]{5}}) \cup (\frac{1}{\sqrt[4]{5}}, \infty)$.

Por tanto la función es decreciente en $(-\frac{1}{\sqrt[4]{5}}, \frac{1}{\sqrt[4]{5}})$ y creciente en los intervalos $[-2, -\frac{1}{\sqrt[4]{5}})$ y $(\frac{1}{\sqrt[4]{5}}, \infty)$.

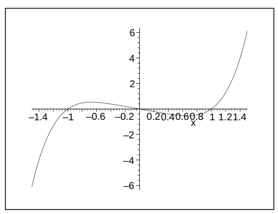
Se sigue que $x = -2$ es un punto de mínimo relativo.
Estudiemos la concavidad de la función:

$$\begin{cases} f''(x) < 0 & \text{si} \quad x \in [-2, 0) \\ f''(x) \geqslant 0 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

Luego la función es cóncava en $[-2, 0)$ y convexa en $[0, \infty)$. $x = 0$ es un punto de inflexión de la función.

b)(4 puntos) Siendo $f(x)$ la función del apartado a), calcula el valor de $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y representa gráficamente dicha función.

Respuesta: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^5 - x = \lim\limits_{x\to\infty} (x^4 - 1) \cdot x = \infty$



5) a)(5 puntos) Estudia la convergencia o divergencia de la sucesión $a_n = \frac{5^n}{1+7^n}$. Si converge halla su límite.

Respuesta: Aplicamos el teorema del cociente a la sucesión obteniendo:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{5^{n+1}}{1+7^{n+1}}}{\frac{5^n}{1+7^n}} = \frac{5^{n+1}(1+7^n)}{(1+7^{n+1})\cdot 5^n} = 5\frac{1+7^n}{1+7^{n+1}} = 5\frac{\frac{1}{7^n}+1}{\frac{1}{7^n}+7} \\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{5}{7} = L \end{aligned}$$

Como $L = \frac{5}{7} < 1$, entonces la sucesión es convergente y $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n) = 0$.

b)(5 puntos) Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -3\frac{sen(x+1)}{x+1} & \text{si} \quad x > -1 \\ \frac{x^2-x+1}{x+1} & \text{si} \quad x < -1 \\ -3 & \text{si} \quad x = -1 \end{cases}$$

Respuesta: Calculemos los límites por la derecha e izquierda y el valor de la función en $x = -1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1^+} f(x) &= \lim_{x\to -1^+} -3\frac{sen(x+1)}{x+1} = (\frac{0}{0}) = \lim_{x\to -1^+} \frac{-3\cos(x+1)}{1} = \frac{-3}{1} = -3 \\ f(-1) &= -3 \\ \lim_{x\to -1^-} f(x) &= \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2-x+1}{x+1} = -\infty \quad \left(\begin{array}{l} x^2-x+1>0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \text{y} \quad x+1<0 \quad \text{si} \quad x<-1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Se tiene que el límite de $f(x)$ en $x = -1$ no existe, luego la función no es continua en $x = -1$.

Las funciones $sen(x), x+1, x^2-x+1$ son continuas, luego por composición de funciones

continuas y cociente de funciones (donde el denominador no se anule): $-3\frac{sen(x+1)}{x+1}$ es continua en $x > -1$ y $\frac{x^2-x+1}{x+1}$ es continua en $x < -1$.

Se sigue que la función f es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo en el punto $x = -1$.

6) a)(5 puntos) Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(sen(x))$.

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(sen(x)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(sen(x))}{\frac{1}{x}} = (\frac{-\infty}{\infty}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos(x)}{sen(x)}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\cos(x)x^2}{sen(x)} = (\frac{0}{0}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{sen(x)x^2 - 2x\cos(x)}{\cos(x)} = \frac{0}{1} = 0.$$

b)(5 puntos) Calcula la función derivada de la función $f(x) = \int\limits_0^{x^3} \sqrt{t}\, sen(t)\, dt$.

Sea $F(x) = \int\limits_0^{x} \sqrt{t}\, sen(t)\, dt$, entonces $f(x) = F(x^3)$ y

$$f^{(1)}(x) = F^{(1)}(x^3)\cdot 3x^2 = 3x^2\sqrt{x^3}\, sen(x^3).$$

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

Informática de Sistemas y de Gestión *Soluciones del examen B*

Fecha: 11 de Febrero de 2000 **Tiempo: 2 horas**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está compuesto por seis problemas y se valorará sobre 60 puntos.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas. Esta hoja no hace falta entregarla. Tampoco es preciso copiar los enunciados de los problemas en el cuadernillo de examen que entreguéis.

La obtención en esta prueba de una calificación inferior a 21 puntos (el equivalente a 3.5 sobre 10) supondrá una calificación de suspenso *en la asignatura.*

1) a)(8 puntos) Determina los puntos de extremos relativos y los intervalos de monotonía, convexidad y concavidad de la función $f(x) = xe^x$ en $[-2, \infty)$.

Respuesta: Tenemos $f'(x) = e^x \cdot (1+x)$ y $f''(x) = e^x \cdot (2+x)$. Estudiemos el valor de la primera derivada.

$$\begin{cases} f'(x) = 0 & \text{si} & x = -1 \\ f'(x) < 0 & \text{si} & x \in [-2, -1) \\ f'(x) > 0 & \text{si} & x \in (-1, \infty) \end{cases}$$

Veamos cuanto vale la segunda derivada en el punto crítico: $f''(-1) = \frac{1}{e} > 0$.

Por lo tanto -1 es un punto de mínimo local. Ahora estudiamos la monotonía: la función es decreciente en el intervalo $[-2, -1)$ y creciente en el intervalo $(-1, \infty)$.

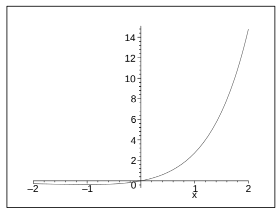
Se sigue que $x = -2$ es un punto de máximo relativo.

Estudiemos la concavidad de la función: $f''(x) = e^x \cdot (2+x) \geq 0$ si $x \in [-2, \infty)$,

luego la función es convexa en $[-2, \infty)$.

b)(4 puntos) Siendo $f(x)$ la función del apartado a), calcula el valor de $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y representa gráficamente dicha función.

Respuesta: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x \cdot e^x = \infty$



2) a)(5 puntos) Estudia la convergencia o divergencia de la sucesión $a_n = \frac{2^n}{1+3^n}$. Si converge halla su límite.

Respuesta: Aplicamos el teorema del cociente a la sucesión obteniendo:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{1+3^{n+1}}}{\frac{2^n}{1+3^n}} = \frac{2^{n+1} \cdot (1+3^n)}{(1+3^{n+1}) \cdot 2^n} = \frac{2(1+3^n)}{1+3^{n+1}} = 2\frac{\frac{1}{3^n}+1}{\frac{1}{3^n}+3}$$

$$\lim_{n\to\infty} 2\frac{\frac{1}{3^n}+1}{\frac{1}{3^n}+3} = \frac{2}{3} = L$$

Como $L = \frac{2}{3} < 1$, entonces la sucesión es convergente y $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$.

b)(5 puntos) Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x-2)+1}{x-2} & \text{si} \quad x < 2 \\ \frac{x^2-2x}{x+2} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}.$$

Respuesta: Calculemos los límites por la derecha e izquierda y el valor de la función en $x = 2$.

$$f(2) = 0, \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{\cos(x-2)+1}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2-2x}{x+2} = 0$$

Se tiene el límite de $f(x)$ en $x = 2$ no existe, luego la función no es continua en $x = 2$.

Las funciones $\cos(x), x-2, x+1, x^2-2x, x+2$ son continuas, luego por composición de funciones continuas y cociente de funciones (donde el denominador no se anule):

$\frac{\cos(x-2)+1}{x-2}$ es continua si $x < 2$ y $\frac{x^2-2x}{x+2}$ es continua si $x > 2$.

Luego la función f es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo en el punto $x = 2$.

3) (10 puntos) Contesta VERDADERO o FALSO (en este problema no hace falta justificar tus respuestas).

a) Toda sucesión creciente y acotada superiormente es de Cauchy. VERDADERO

b) La función $f(x) = sen(x)$ es inyectiva en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. VERDADERO

c) Una relación de equivalencia es también una relación de orden. FALSO

d) El número e es irracional, pero puede expresarse como límite de una sucesión de números racionales. VERDADERO

e) Toda función continua en $[a, b]$ es derivable en (a, b). FALSO

4) Calcula las siguientes integrales: a)(5 puntos) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2x)\ dx$ b)(5 puntos) $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}\ dx$.

NOTA: $\ln(x)$ representa el logaritmo neperiano de x.

a) Utilizando integración por partes con $f(x) = x$, $g\prime(x) = \cos(2x)$ y $g(x) = \frac{sen(2x)}{2}$,se obtiene que

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2x)\ dx = x\frac{sen(2x)}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen(2x)}{2}\ dx = 0 + \frac{1}{2}\frac{\cos(2x)}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$.

b) $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}\ dx = \lim_{c\to 1^+} \int_c^e \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}\ dx$.
Se puede utilizar la sustitución $t = \sqrt{\ln(x)}$, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}$:
$\int_c^e \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}\ dx = \int_{\sqrt{\ln(c)}}^1 2\ dt = 2(1 - \sqrt{\ln(c)})$.
Entonces $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}\ dx = \lim_{c\to 1^+} 2(1 - \sqrt{\ln(c)}) = 2$.

5) a)(5 puntos) Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right)$.
Operando dentro del corchete, y aplicando después L'Hôpital

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x\ln(x) - x + 1}{(x-1)\ln(x)}\right) = (\frac{0}{0}) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln(x) + 1 - 1}{\ln(x) + \frac{x-1}{x}}\right) = (\frac{0}{0}) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{x-x+1}{x^2}}\right) = \frac{1}{2}$$

b)(5 puntos) Calcula la función derivada de la función $f(x) = \int_{-1}^{\cos(x)} \cos(t^2)\ dt$.

Sea $F(x) = \int_{-1}^{x} \cos(t^2)\ dt$. Entonces $f(x) = F(\cos(x))$ y

$$f^{(1)}(x) = F^{(1)}(\cos(x)) \cdot (-sen(x)) = -sen(x) \cdot \cos(\cos^2(x)).$$

6)(8 puntos) Calcula el polinomio de Taylor $P_3(x)$ de orden 3 de la función $f(x) = xe^{-x}$ en un entorno del punto $x_0 = 0$.
$f^{(1)}(x) = e^{-x} - xe^{-x}$,
$f^{(2)}(x) = -e^{-x} - [e^{-x} - xe^{-x}] = -2e^{-x} + xe^{-x}$,
$f^{(3)}(x) = 2e^{-x} + [e^{-x} - xe^{-x}] = 3e^{-x} - xe^{-x}$.
Entonces $P_3(x) = 0 + 1\cdot x - 2\cdot\frac{x^2}{2} + 3\cdot\frac{x^3}{6} = x - x^2 + \frac{x^3}{2}$.

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

Informática de Sistemas y de Gestión *Soluciones del examen de Septiembre*
Fecha: 5 Septiembre de 2000 **Tiempo: 2h y 30min**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está compuesto por 7 problemas y se valorará sobre 100 puntos.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas. Podéis consultar apuntes, pero no está permitido el uso de calculadoras. Esta hoja no hace falta entregarla. Tampoco es preciso copiar los enunciados de los problemas en el cuadernillo de examen que entreguéis.

La obtención en esta prueba de una calificación inferior a 50 puntos supondrá una calificación de suspenso en la asignatura.

1) (14 puntos: 2 puntos para cada apartado) Contesta **VERDADERO** o **FALSO** .

En este problema **no hace falta** justificar tus respuestas.

a) Si x es un número real, entonces $|3x-1| \leq 2 \Leftrightarrow x \in [\frac{-1}{3}, 1]$.

SOL: verdadero. $|3x-1| \leq 2 \Rightarrow \left|x - \frac{1}{3}\right| \leq \frac{2}{3}$. Entonces la distancia entre x y $\frac{1}{3}$ tiene
que ser menor o igual a $\frac{2}{3}$.

b) La función $f(x) = 3x^2 - x$ es inyectiva en $[0,1]$.

SOL: falso. En $[0,1]$, $f(x) = 3x^2 - x = x(3x-1) = 0$ si $x = 0$ o $x = \frac{1}{3}$.

c) En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, sea R la relación definida por

$\forall x, y \in \mathbb{Z},\ xRy \Longleftrightarrow 2x - 2y = 3k$, donde k es un cualquier número entero.

Entonces R es una relación de equivalencia.

SOL:verdadero. Es reflexiva ($\forall x \in \mathbb{Z},\ xRx$), simétrica ($\forall x, y \in \mathbb{Z}$, $xRy \Rightarrow yRx$) y
transitiva ($\forall x, y, z \in \mathbb{Z},\ xRy$ e $yRz \Rightarrow xRz$).

d) Toda sucesión decreciente de Cauchy está acotada superiormente.

SOL:verdadero. Toda sucesión de Cauchy es convergente. Entonces está acotada

superiormente e inferiormente.

e) Sea $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$.

Si $f(0) = 2$ y $f(1) = 5$, entonces existe $c \in (0,1)$ tal que $Df(c) = 3$.

SOL: verdadero. Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$,

por el teorema del valor medio, existe $c \in (0,1)$ tal que $Df(c) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = 3$.

f) Si una función es Riemann-integrable en un intervalo acotado, entonces es continua en dicho intervalo.

SOL: falso. La función $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$ no es continua en $[0,1]$, pero es

Riemann-integrable.

g) Cuando está definido, el producto de dos funciones derivables es siempre una función derivable.

SOL: verdadero. Se sigue de un teorema visto en clase.

2) Estudia la convergencia de las siguientes integrales:

a)(8 puntos) $\int_0^1 e^{6x}\cos(e^{3x})\ dx$ b)(8 puntos) $\int_2^4 \frac{3x}{x-2}\ dx$

c)(8 puntos) $\int_0^1 e^{\arctan(x)}\frac{1}{1+x^2}dx$ $(arctan(1) = \frac{\pi}{4})$.

NOTA: Identifica las integrales que son propias o impropias y explica el método

(o los métodos) de integración utilizado.

SOL: a) La integral es propia, ya que la función $e^{6x}\cos(e^{3x})$ es continua en $[0,1]$.

Primero se puede utilizar la sustitución: $t = e^{3x}$, $\frac{dt}{dx} = 3e^{3x} = 3t$ y se obtiene que

$\int_0^1 e^{6x}\cos(e^{3x})\ dx = \int_1^{e^3} t^2\cos(t)\ \frac{1}{3t}dt = \frac{1}{3}\int_1^{e^3} t\cos(t)\ dt$. Ahora integramos por partes:

$\frac{1}{3}\int_1^{e^3} t\cos(t)\ dt = \frac{1}{3}\left[t\ sen(t)|_1^{e^3} - \int_1^{e^3} sen(t)dt\right] = \frac{1}{3}\left[e^3\ sen(e^3) - sen(1) + \cos(t)|_1^{e^3}\right] =$

$= \frac{1}{3}\left[e^3\ sen(e^3) - sen(1) + \cos(e^3) - \cos(1)\right].$

b) La integral es impropia, ya que la función $\frac{3x}{x-2}$ no está definida en $x = 2$.

Sea $a \in (2,4]$. La integral $\int_a^4 \frac{3x}{x-2}\, dx$ es propia , ya que $\frac{3x}{x-2}$ es continua en $[a,4]$ y

$\int_a^4 \frac{3x}{x-2}\, dx = 3\int_a^4 \frac{x}{x-2}\, dx = 3\int_a^4 \frac{x-2}{x-2} + \frac{2}{x-2}\, dx = 3\left[4 - a + 2\ln(x-2)|_a^4\right] =$
$= 12 - 3a + 6\ln(2) - 6\ln(a-2)$.

Entonces $\lim\limits_{a\to 2^+} \int_a^4 \frac{3x}{x-2}\, dx = \lim\limits_{a\to 2^+} 12 - 3a + 6\ln(2) - 6\ln(a-2) = \infty$ y la integral diverge.

c) La integral es propia, ya que la función $e^{\arctan(x)}\frac{1}{1+x^2}$ es continua en $[0,1]$.

Con la sustitución: $t = \arctan(x)$, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$ se obtiene que

$\int_0^1 e^{\arctan(x)}\frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^t dt = e^t|_0^{\frac{\pi}{4}} = e^{\frac{\pi}{4}} - 1$.

3) (10 puntos) Halla el valor de la constante c tal que las gráficas de las dos funciones

$$f(x) = sen(4x) \qquad \text{y} \qquad g(x) = 1 - e^{cx}$$

sean lo más parecidas posible en un entorno del punto $x_0 = 0$.

NOTA: Utiliza el teorema de Taylor.

SOL: En un entorno del punto $x_0 = 0$,

$f(x) = sen(0) + 4\cos(0)x - \frac{16}{2}sen(0)x^2 - \frac{64}{6}\cos(0)x^3 + R_4(0) = 4x - \frac{32}{3}x^3 + R_4(0)$

$g(x) = 1 - 1 - ce^0x + \frac{c^2}{2}e^0x^2 + R_3(0) = -cx + \frac{c^2}{2}x^2 + R_3(0)$. Tenemos que elegir $c = -4$.

4) (20 puntos) Determina el dominio, los límites, los puntos de extremos relativos y

los intervalos de monotonía, convexidad y concavidad de la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

en $[0,\infty)$. Representa $f(x)$ gráficamente utilizando la información hallada.

SOL: La función está definida en $dom(f(x)) = [0,\infty) - \{1\}$. $\lim\limits_{a\to 1^+} f(x) = \infty$,

$\lim\limits_{a\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. La derivada es $Df(x) = \frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.

Los puntos críticos son $x = 0$ y $x = 2$ y $Df(x)\begin{cases} > 0 & \text{si } x > 2 \\ < 0 & \text{si } 0 < x < 2 \end{cases}$.

Entonces, $f(x)$ es decreciente en $[0,2)-\{1\}$ y creciente en $[2,\infty)$. Se sigue que $x=2$ es

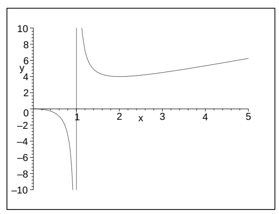
un punto de mínimo relativo, mientras $x=0$ es un punto de máximo relativo.

$f(0)=0$ y $f(2)=4$.

$D^2f(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)^2-2(x^2-2x)}{(x-1)^3} = \frac{2x^2-4x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}\begin{cases} >0 & \text{si } x>1 \\ <0 & \text{si } x<1 \end{cases}.$

La función es convexa en $(1,\infty)$ y concava en $[0,1)$.

$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$



5) a)(6 puntos) Estudia la convergencia o divergencia de la sucesión $a_n = \frac{e^{2n+1}}{n!}$.

Si converge halla su límite.

SOL: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{2n+3}}{(n+1)!}\dfrac{n!}{e^{2n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^2}{n+1} = 0 < 1$. Por el criterio

del cociente, la sucesión

es convergente $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b)(8 puntos) Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \in (-\infty,-2) \\ \frac{-1}{4} & \text{si } x=-2 \\ x+\frac{7}{4} & \text{si } x\in(-2,0] \\ \frac{7x^2-2}{4x} & \text{si } x\in(0,\infty) \end{cases}.$$

SOL: Las funciones x^2, x y $7x^2-2$ son continuas en todo $\mathbb{R}$, entonces $f(x)$

es continua en $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{4} \neq \dfrac{-1}{4} = f(-2)$. Entonces $f(x)$ no es continua en $x = -2$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} x + \dfrac{7}{4} = \dfrac{7}{4}$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{7x^2 - 2}{4x} = -\infty$. Entonces $f(x)$ no es continua en $x = 0$.

6) a)(8 puntos) Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(sen(x))}{\ln(sen(2x))}$.

SOL: $\lim\limits_{x \to 0^+} sen(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} sen(2x) = sen(0) = 0$ y las funciones $sen(x)$ y $sen(2x)$

son positiva si $0 < x < \frac{\pi}{4}$. Entonces $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln sen(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln(sen(2x)) = -\infty$.

Las funciones $\ln sen(x)$ y $\ln(sen(2x))$ son derivables en $(0, \frac{\pi}{4})$ y

$\frac{d}{dx}(\ln(sen(x))) = \frac{\cos(x)}{sen(x)}$, $\frac{d}{dx}(\ln(sen(2x))) = \frac{2\cos(2x)}{sen(2x)}$. Ya que $\ln(sen(2x)) \neq 0$ y

$\frac{2\cos(2x)}{sen(2x)} \neq 0$ en $(0, \frac{\pi}{4})$, aplicando el teorema de L'Hôpital se obtiene que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(sen(x))}{\ln(sen(2x))} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\cos(x)}{sen(x)} \dfrac{sen(2x)}{2\cos(2x)} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\cos(x)}{\cos(2x)} \dfrac{sen(2x)}{2x} \dfrac{1}{\frac{sen(x)}{x}} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.

b)(4 puntos) Calcula la función derivada de la función $f(x) = \int\limits_0^{2x^5} \ln(1 + e^{6t})\, dt$.

SOL: Sea $F(x) = \int\limits_0^x \ln(1 + e^{6t}) dt$, entonces $f(x) = F(2x^5)$. Aplicando el teorema fundamental

del cálculo integral se obtiene que

$$Df(x) = DF(2x^5) \cdot 10x^4 = 10x^4 \ \ln(1 + e^{12x^5}).$$

7) (6 puntos) Un cuerpo está conectado a un muelle y se mueve a lo largo del eje de

las x según la ley $x(t) = sen(2t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos(2t)$.

¿Cuál es la distancia máxima del cuerpo del origen?

NOTA: $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, $sen(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$.

SOL: Se trata de hallar el máximo de la función $x(t)$, que es derivable en $[0, \infty)$.

$Dx(t) = 2\cos(2t) - \frac{2}{\sqrt{3}} sen(2t) = 0$ si $tan(2t) = \sqrt{3}$, es decir,

$Dx(t) = 0$ si $2t = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Además $Dx(t) = 2\cos(2t) - \frac{2}{\sqrt{3}} sen(2t) \begin{cases} > 0 & si \;\; tan(2t) < \sqrt{3} \\ < 0 & si \;\; tan(2t) > \sqrt{3} \end{cases}$.

Se sigue que el punto crítico $t = \frac{\pi}{6}$ es un punto de máximo relativo de la función $x(t)$ y

$x(\frac{\pi}{6}) = sen(\frac{\pi}{3}) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$

Ya que $x(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} < x(\frac{\pi}{6}) = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, el valor máximo de la distancia del cuerpo del origen es igual a $\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Capítulo 11

Soluciones de los exámenes 2000-2001

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

(Informática de Gestión) *Soluciones del primer Examen Parcial*
Fecha: 27 de Noviembre del 2000 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por cinco problemas.
La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre dos puntos.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

Podéis consultar apuntes, pero no está permitido el uso de calculadoras.

Determinar si las afirmaciones **de los primeros tres problemas** son verdaderas o falsas; si son verdaderas aportando un razonamiento, si son falsas indicando un contraejemplo.

1) a) Sean $A = \{a \in \mathbb{R} : |a - \frac{1}{2}| < 2\}$ y $B = \{b \in \mathbb{R} : |b+1| < 1\}$. Entonces $A \setminus B = [0, \frac{5}{4})$.

FALSA: $A = (-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$, $B = (-2, 0)$, $A \setminus B = [0, \frac{5}{2})$.

b) Sea A un conjunto no vacío y sea $f \subseteq A \times A$ una función. Entonces f no puede ser una relación simétrica.

FALSA: la función $f(x) = x$ es simétrica.

2) a) En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, la relación binaria

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (3,4), (4,3)\}$$

es una relación de orden.

FALSA: R no es antisimétrica, ya que $(3,4), (4,3) \in R$ y $3 \neq 4$.

b) El conjunto $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ no es numerable.

FALSA: $\mathbb{Q} \cap (0,1) \subset \mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}$ es numerable.

3) a) Toda sucesión contractiva está acotada superiormente.

VERDADERA: Toda sucesión contractiva es convergente, entonces está acotada (superiormente e inferiormente).

b) Toda sucesión acotada superiormente contiene una subsucesión convergente.

FALSA: la sucesión $\{a_n\} = \{-n\}$ está acotada superiormente y no contiene ninguna subsucesión convergente.

4) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 3 + \dfrac{1}{a_n} \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Verificar que

a) $\forall n \geq 1, \quad 3 \leq a_n < 4.$

Los términos de la sucesión son positivos y $a_1 = 3 \geq 3$, $a_{n+1} = 3 + \dfrac{1}{a_n} \geq 3 \quad \forall n \geq 1.$

Además, $a_1 = 3 < 4$ y $a_{n+1} = 3 + \dfrac{1}{a_n} < 3 + \dfrac{1}{3} < 4 \quad \forall n \geq 1.$

b) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es contractiva.

$|a_{n+2} - a_{n+1}| = \left|3 + \dfrac{1}{a_{n+1}} - 3 - \dfrac{1}{a_n}\right| = \left|\frac{a_n - a_{n+1}}{a_n a_{n+1}}\right| \leq \frac{|a_n - a_{n+1}|}{9} \quad \forall n \geq 1$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existe y es igual a $\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Siendo contractiva, la sucesión $\{a_n\}$ es convergente. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} 4 \geq L = lm$ $a_n \geq 3$. Entonces

$L = 3 + \dfrac{1}{L} \Leftrightarrow L^2 - 3L - 1 = 0 \Leftrightarrow L = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \Rightarrow L = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$, siendo L un valor positivo.

5) Determinar si la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\dfrac{\ln(3^{2^n})}{\ln(2^{n!})}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Si lo es, hallar su límite. (Utilizar las propiedades del logaritmo.)

$$a_n = \frac{\ln(3^{2^n})}{\ln(2^{n!})} = \frac{2^n \ln(3)}{n! \ln(2)} > 0 \ \forall n \geq 1 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

Por el criterio del cociente, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas (mañana)) *Soluciones del primer Examen Parcial*
Fecha: 27 de Noviembre del 2000 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por cinco problemas.
La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre dos puntos.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.
Podéis consultar apuntes, pero no está permitido el uso de calculadoras.

Determinar si las afirmaciones **de los primeros tres problemas** son verdaderas o falsas; si son verdaderas aportando un razonamiento, si son falsas indicando un contraejemplo.

1) a) Sean A, B y C tres conjuntos no vacíos. Si $A \subseteq B$ y $A \cap C = B \cap C$, entonces $C \subseteq A$.

FALSA: por ejemplo si $A \cap C = B \cap C = \emptyset$.

b) Si $f : A \to B$ es una función inyectiva y $g : B \to C$ es una función sobreyectiva, entonces la función compuesta $g \circ f$ es inyectiva.

FALSA: por ejemplo, sean $A = B = \{a, b\}$ con $a \neq b$, $C = \{c\}$ y f la función identidad.

Entonces, $g \circ f(a) = g \circ f(b) = c$.

2) a) En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, la relación binaria

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (3,1), (1,3)\}$$

es una relación de equivalencia.

VERDADERO: R es reflexiva, simétrica y transitiva (las únicas relaciones no triviales son $(3,1)$ y $(1,3)$).

b) El conjunto $A = \{4n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$ es numerable.

VERDADERO: la función $f : \mathbb{N} \to A$ definida por $f(n) = 4n - 1$ es biyectiva.

3) a) Toda sucesión divergente es tal que todas sus subsucesiones son divergentes.

FALSO: la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente pero la subsucesión $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

b) Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tres sucesiones tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ $\quad 0 < a_n \leq b_n \leq c_n$.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_n}{a_n} = 1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 1$.

VERDADERO: siendo $0 < a_n \ \forall\ n \in \mathbb{N}$, podemos dividir $0 < a_n \leq b_n \leq c_n$ por a_n obteniendo que

$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq \dfrac{b_n}{a_n} \leq \dfrac{c_n}{a_n}$. Por el teorema del sandwich, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 1$.

4) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por

$$\begin{cases} a_1 = -15 \\ a_{n+1} = 3 - \dfrac{1}{2}|a_n| \qquad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Verificar que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es contractiva y hallar su límite.

Para todo $n \geq 1$,

$|a_{n+2} - a_{n+1}| = \left|3 - \dfrac{1}{2}|a_{n+1}| - 3 + \dfrac{1}{2}|a_n|\right| = \dfrac{1}{2}\left||a_{n+1}| - |a_n|\right| \leq \dfrac{1}{2}\left|a_{n+1} - a_n\right|.$

Se sigue que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es contractiva y convergente. Sea $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Entonces,

$L = 3 - \dfrac{1}{2}|L| \Leftrightarrow L + \dfrac{1}{2}|L| = 3.$

Si $L \geq 0$, la solución es $L = 2$ y si $L < 0$, la solución es $L = 6$.

La única solución posible es $L = 2$.

5) Determinar si la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{1 + \dfrac{n}{n+1} sen(\dfrac{n\pi}{2})\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. Si lo es, hallar su límite.

La sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no puede ser convergente ya que contiene las siguientes subsucesiones que convergen a límites distintos:

$\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{1 + \dfrac{2n}{2n+1} sen(n\pi)\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 1$

$\{a_{4n+1}\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{1 + \dfrac{4n+1}{4n+2} sen(\dfrac{(4n+1)\pi}{2})\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{1 + \dfrac{4n+1}{4n+2} sen(2n\pi + \dfrac{\pi}{2})\right\}_{n\in\mathbb{N}} =$

$$= \left\{ 1 + \frac{4n+1}{4n+2} \right\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} a_{4n+1} = 2.$$

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

(Informática de Gestión) *Soluciones del segundo Examen Parcial*
Fecha: 17 de Enero del 2001 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por cuatro problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

Podéis consultar apuntes, pero no está permitido el uso de calculadoras.

1) (1 punto) ¿Pueden existir dos funciones f y g tales que

$\lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} g(x)$ no existe y $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) \in \mathbb{R}$?

No, no pueden ya que la función $g(x) = (f(x)+g(x)) - f(x)$ tendría límite en a.

2) (1 punto) Halla la derivada de la función $f(x) = 3^{arctg(x)}$.

$$f'(x) = 3^{arctg(x)} \ln(3) \tfrac{1}{1+x^2}.$$

3) (4 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \le 2 \\ mx+b & \text{si} \quad x > 2, \end{cases}$$

estudia la derivabilidad de f en todo $\mathbb{R}$ y determina los valores de las constantes m y b para que f sea derivable en $x=2$.

La función f es derivable en todo $x \neq 2$, ya que x^2 y $mx+b$ son funciones derivables (son polinomios).

f es continua en $x=2$ si $f(2) = 4 = \lim_{x\to 2^-} x^2 = \lim_{x\to 2^+} mx+b = 2m+b$.

Entonces tiene que ser $b = 4-2m$.

f es derivable en $x=2$ si $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ existe. Ahora,

$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} x+2 = 4$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{mx-2m}{x-2} = m.$

Por tanto f es derivable en $x=2$ si y sólo si $m=4$ y $b=-4$.

4) (4 puntos) Una esfera de hielo se derrite de forma tal que su superficie disminuye a una tasa de $1 \text{ cm}^2/\text{min}$.

i) Escribe una fórmula que defina la relación existente entre la función superficie $S(t)$ de la esfera y la función longitud $r(t)$ de su radio para todo valor del tiempo t.

$S(t) = 4\pi r^2(t)$.

ii) Halla la expresión de la tasa de cambio del radio de la esfera en función de $r(t)$ y de la tasa de cambio de $S(t)$.

$-1 = \frac{dS}{dt} = 8\pi r(t)\frac{dr}{dt} \Longrightarrow \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{8\pi r(t)}$

iii) Halla la tasa de cambio del radio cuando $r(t) = 5$ cm.

$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{40\pi}$ cm/min.

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas (mañana)) *Soluciones del segundo Examen Parcial*
Fecha: 17 de Enero del 2001 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por cuatro problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicados.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

Podéis consultar apuntes, pero no está permitido el uso de calculadoras.

1) (1 punto) Sea I un intervalo abierto y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en I y tal que $\frac{df}{dx}(x) < 1$ para todo $x \in I$. Verifica que f no puede tener más que un punto fijo en I.

($x \in I$ es un punto fijo de f si $f(x) = x$).

Supongamos que existan dos puntos $x, y \in I$, $x \neq y$, que son puntos fijos de f. Entonces $f(x) = x$ y $f(y) = y$.

Por el teorema del valor medio de Lagrange existe un punto $c \in I$ entre x e y tal que $f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$.

Por tanto se llega al a contradicción $1 = \frac{y-x}{y-x} = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c) < 1$.

2) (1 punto) Sea $f(x) = [3\ arctg(x)]^4$. Halla $\frac{df}{dx}(x)$.

$\frac{df}{dx}(x) = 4[3\ arctg(x)]^3 \frac{3}{1+x^2} = \frac{12[3arctg(x)]^3}{1+x^2}$.

3) (4 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si} \quad x \leq 0 \\ sen(\frac{\pi x}{2}) & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \ln(x) & \text{si} \quad 1 \leq x < e \\ \frac{x}{e} & \text{si} \quad x \geq e, \end{cases}$$

estudia la continuidad de f en todo $\mathbb{R}$ y determina los valores de la constante a para que f sea continua en $x = 0$.

Si $x \notin \{0, 1, e\}$ entonces la función f es continua, ya que las funciones $x^2 + a$, $sen(\frac{\pi x}{2})$, $\ln(x)$ y $\frac{x}{e}$ son continuas.

f es continua en $x=0$ si $f(0)=a=\lim\limits_{x\to 0^-} x^2+a=\lim\limits_{x\to 0^+} sen(\dfrac{\pi x}{2})=0$, es decir si $a=0$.

f es continua en $x=1$ si $f(1)=\ln(1)=0=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

Pero $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=sen(\frac{\pi}{2})=1$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\ln(x)=0$. Por tanto f no es continua en $x=1$.

f es continua en $x=e$ si $f(e)=1=\lim\limits_{x\to e^-}\ln(x)=\lim\limits_{x\to e^+}\dfrac{x}{e}$. Se sigue que f es continua en $x=e$.

4) (4 puntos) Una escalera de longitud 100 cm está apoyada a una pared vertical.

Se asume que su extremidad inferior se desliza en dirección opuesta a la pared a una velocidad de 25 cm/s.

i) Encuentra una fórmula que defina la relación existente entre la función posición $x(t)$ de la extremidad inferior y el valor del ángulo $\theta(t)$ formado por la escalera y la pared para todo valor del tiempo t.

$x(t)=100sen(\theta(t))$

ii) Halla la expresión de la tasa de cambio de $\theta(t)$ en función de la tasa de cambio de $x(t)$ y de la función $\theta(t)$.

$\frac{dx}{dt}=100\cos(\theta(t))\frac{d\theta}{dt}\Longrightarrow\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{100\cos(\theta(t))}\frac{dx}{dt}=\frac{1}{4\cos(\theta(t))}$ (siendo $\frac{dx}{dt}=25$).

iii) Halla la tasa de cambio de $\theta(t)$ cuando $x(t)=60$cm.

Si $x(t)=60$cm, el triángulo rectángulo determinado por la escalera, la pared vertical y la pared horizontal tiene dimensiones iguales a $60,100$ y $\sqrt{(100)^2-(60)^2}=80$. Por tanto $\cos(\theta(t))=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$.

Se sigue que si $x(t)=60$cm entonces $\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{4\frac{4}{5}}=\frac{5}{16}rad/\sec$.

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

Informática de Sistemas y de Gestión *Soluciones del examen A*
Fecha: 7 de Febrero de 2001 **Tiempo: 2 horas y media**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está compuesto por seis problemas y se valorará sobre 60 puntos.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas. Esta hoja no hace falta entregarla. Tampoco es preciso copiar los enunciados de los problemas en el cuadernillo de examen que entreguéis.

La obtención en esta prueba de una calificación inferior a 21 puntos (el equivalente a 3.5 sobre 10) supondrá una calificación de suspenso en la asignatura.

1) a) (6 puntos) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una función tal que $|f(n)| \le 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se define la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = \dfrac{a_{n-1} + f(n)}{n} & \forall\, n \ge 2. \end{cases}$$

Demostrar por inducción que $|a_n| \le 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ y concluir que $|a_n| \le \dfrac{2}{n}$

y que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Por inducción: $|a_1| = 1 \le 1, |a_2| = \left|\dfrac{a_1 + f(2)}{2}\right| \le \frac{|a_1|+|f(2)|}{2} \le \frac{1+1}{2} = 1.$
De forma similar,

si $|a_n| \le 1$ y $n \ge 2$, entonces $|a_{n+1}| = \left|\frac{a_n + f(n+1)}{n+1}\right| \le \frac{|a_n|+|f(n+1)|}{n+1} \le \frac{1+1}{n+1} = \frac{2}{n+1} \le 1.$

De las desigualdades anteriores se sigue que $0 \le |a_n| \le \dfrac{2}{n} \;\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Por el teorema del sandwich, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) (6 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -3\dfrac{sen(x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ acos(x) + b & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\cos(x-\frac{\pi}{2}) + (x^2 - \frac{\pi^2}{4}) - 1}{(x-\frac{\pi}{2})} & \text{si } x > \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

elegir las constantes a y b para que f sea continua en todos los puntos de $\mathbb{R}$.

La función f es continua en $\mathbb{R}\backslash\{0, \frac{\pi}{2}\}$, para todo valor de las constantes a y b, ya que es cociente de funciones continuas y x, $x - \frac{\pi}{2}$ son valores siempre distintos de 0 en $\mathbb{R}\backslash\{0, \frac{\pi}{2}\}$.

En el punto $x = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} a\cos(x) + b = a + b$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -3\dfrac{sen(x)}{x} = -3$ y $f(0) = a + b$. Se sigue que f es continua en $x = 0$ si $a + b = -3$.

En el punto $x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\cos(x-\frac{\pi}{2}) - 1}{(x-\frac{\pi}{2})} + \dfrac{(x^2-\frac{\pi^2}{4})}{(x-\frac{\pi}{2})} =$
$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} x + \dfrac{\pi}{2} = \pi$,

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} a\cos(x) + b = b$ y $f(\frac{\pi}{2}) = b$. Se sigue que f es continua en $\frac{\pi}{2}$ si $b = \pi$.

Por tanto f es continua en todo $\mathbb{R}$ si y sólo si $a = -3 - \pi$ y $b = \pi$.

2) (8 puntos) Determina las asíntotas, los extremos relativos y los intervalos de monotonía, convexidad y concavidad de la función $f(x) = 64x^3 - 2x$ en $(-\infty, \infty)$ y representa gráficamente dicha función.

$dom(f) = (-\infty, \infty)$.

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 64x^2 - 2 = \infty$

No hay asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

La función es derivable en todo $\mathbb{R}$ y $f'(x) = 192x^2 - 2 = 0$ si $x = \pm\frac{1}{\sqrt{96}} = \pm\frac{1}{4\sqrt{6}}$.

Entonces los puntos críticos son $x = \frac{1}{4\sqrt{6}}$ y $x = -\frac{1}{4\sqrt{6}}$.

Monotonía: $f'(x) > 0$ si $|x| > \frac{1}{4\sqrt{6}}$,

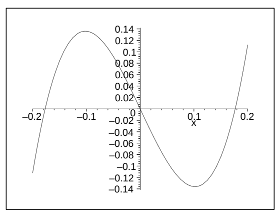
la función es creciente en $(-\infty, -\frac{1}{4\sqrt{6}}) \cup (\frac{1}{4\sqrt{6}}, \infty)$ y decreciente en $(-\frac{1}{4\sqrt{6}}, \frac{1}{4\sqrt{6}})$.

Por el test de la derivada primera $x = -\frac{1}{4\sqrt{6}}$ es un máximo relativo y $x = \frac{1}{4\sqrt{6}}$ es un
mínimo relativo.

$f^{(2)}(x) = 384x$, entonces la función es cóncava en $(-\infty, 0)$ y convexa en $(0, \infty)$.

El punto $x = 0$ es un punto de inflexión.

$f(x) = 2x(32x^2 - 1) = 0$ si $x = 0, x = \pm\frac{1}{4\sqrt{2}}$ y $f(x) > 0$ en $(-\frac{1}{4\sqrt{2}}, 0) \cup (\frac{1}{4\sqrt{2}}, \infty)$.



$f(x) = 64x^3 - 2x$

3) (10 puntos) Calcula el polinomio de Taylor $P_3(x; 0)$ de orden 3 de la función $f(x) = x\cos(2x)$ en un entorno del punto $x_0 = 0$.

$f(x) = x\cos(2x)$, $\quad f(0) = 0$,

$f'(x) = \cos(2x) - 2xsen(2x)$, $\quad f'(0) = 1$,

$f^{(2)}(x) = -4sen(2x) - 4x\cos(2x)$, $\quad f^{(2)}(0) = 0$,

$f^{(3)}(x) = -12\cos(2x) + 8xsen(2x)$ $\quad f^{(3)}(0) = -12$.

$P_3(x; 0) = x - \frac{12}{6}x^3 = x - 2x^3$.

4) (10 puntos) Una persona se encuentra a 30 metros de un punto P de una vía de tren.

Un tren se acerca por dicha vía a una velocidad de 90 Km/h.

¿Con qué razón decrece la distancia entre el tren y la persona cuando se encuentran a 50 metros de distancia?

Sean $x(t)$ la distancia entre el tren y el punto P en el instante de tiempo t e $y(t)$ la distancia entre el tren y la persona en el instante de tiempo t. Entonces $\frac{dx}{dt} = 90km/h$ y $x^2(t) + (30)^2 = y^2(t)$.

Derivando implícitamente se obtiene que $x(t)\frac{dx}{dt} = y(t)\frac{dy}{dt} \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{x(t)}{y(t)}\frac{dx}{dt}$.

Si $y(t) = 50m$, entonces $x(t) = \sqrt{(50)^2 - (30)^2} = \sqrt{1600} = 40m$ e $y(t) = -\frac{40}{50}90km/h = -72km/h$.

5) Calcula los siguientes límites:

a) (5 puntos) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{2x} tg(t)\ dt}{sen(2x)}$.

Se trata de una forma indeterminada de tipo $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to 0} \int_0^{2x} tg(t)\ dt = 0 = \lim\limits_{x\to 0} sen(2x)$.

Además, $\frac{d}{dx}sen(2x) = 2\cos(2x) \neq 0$ en un entorno $I \setminus \{0\}$ de 0. Aplicando la regla de l'Hôpital, se obtiene que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{2x} tg(t)dt}{sen(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2tg(2x)}{2\cos(2x)} = 0.$$

b) (5 puntos) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))}$.

Se trata de una forma indeterminada de tipo $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to 0} \ln(\cos(2x)) = \ln(1) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} \ln(\cos(3x))$

Además, $\frac{d}{dx}\ln(\cos(3x)) = \frac{-3sen(3x)}{\cos(3x)} \neq 0$ en un entorno $I \setminus \{0\}$ de 0. Aplicando la regla de l'Hôpital, se obtiene que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{sen(2x)\cos(3x)}{sen(3x)\cos(2x)} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{2\frac{sen(2x)}{2x}}{3\frac{sen(3x)}{3x}} \frac{\cos(3x)}{\cos(2x)} = \frac{4}{9}.$$

6) Calcula las siguientes integrales

a)(5 puntos) $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}\ dx$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\ dx = \sqrt{x^2+4} + C$$

b)(5 puntos) $\int_1^4 x\ 5^x\ dx$.

$$\int_1^4 x\ 5^x\ dx \overset{\text{por partes}}{=} x\frac{5^x}{\ln(5)}\Big|_1^4 - \int_1^4 \frac{5^x}{\ln(5)}\ dx = [x\frac{5^x}{\ln(5)} - x\frac{5^x}{[\ln(5)]^2}]_1^4 =$$
$$= (4 - \frac{1}{\ln(5)})\frac{5^4}{\ln(5)} - (1 - \frac{1}{\ln(5)})\frac{5}{\ln(5)}.$$

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

Informática de Sistemas y de Gestión *Soluciones del Examen B*

Fecha: 7 de Febrero de 2001 **Tiempo: 2 horas y media**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está compuesto por seis problemas y se valorará sobre 60 puntos.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas. Esta hoja no hace falta entregarla. Tampoco es preciso copiar los enunciados de los problemas en el cuadernillo de examen que entreguéis.

La obtención en esta prueba de una calificación inferior a 21 puntos (el equivalente a 3.5 sobre 10) supondrá una calificación de suspenso en la asignatura.

1) a) (6 puntos) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una función tal que $|f(n)| \leq \dfrac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se define la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = \dfrac{a_{n-1} + \ 2\ f(n)}{n} \quad \forall\ n \geq 2. \end{cases}$$

Demostrar por inducción que $|a_n| \leq 1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$ y concluir que $|a_n| \leq \dfrac{2}{n}$ y que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Por inducción: $|a_1| = 1 \leq 1, |a_2| = \left|\dfrac{a_1 + 2\ f(2)}{2}\right| \leq \frac{|a_1|+2|f(2)|}{2} \leq \frac{1+1}{2} = 1.$ De forma similar,

si $|a_n| \leq 1$ y $n \geq 2$, entonces $|a_{n+1}| = \left|\frac{a_n+2f(n+1)}{n+1}\right| \leq \frac{|a_n|+2|f(n+1)|}{n+1} \leq \frac{1+1}{n+1} = \frac{2}{n+1} \leq 1.$

De las desigualdades anteriores se sigue que $0 \leq |a_n| \leq \dfrac{2}{n}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Por el teorema del sandwich, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) (6 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -3\dfrac{\cos(x)-1}{x} & \text{si } \ x<0 \\ asen(x)+b & \text{si } \ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{sen(x-\dfrac{\pi}{2})}{(x-\dfrac{\pi}{2})} & \text{si } \ x > \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

elegir las constantes a y b para que f sea continua en todos los puntos de $\mathbb{R}$.

La función f es continua en $\mathbb{R}\backslash\{0, \frac{\pi}{2}\}$, para todo valor de las constantes a y b, ya que es cociente de funciones continuas y x, $x-\frac{\pi}{2}$ son valores siempre distintos de 0 en $\mathbb{R}\backslash\{0, \frac{\pi}{2}\}$.

En el punto $x=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} asen(x)+b = b$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} -3\dfrac{\cos(x)-1}{x} = 0$ y $f(0)=b$. Se sigue que f es continua en $x=0$ si $b=0$.

En el punto $x=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{sen(x-\dfrac{\pi}{2})}{(x-\dfrac{\pi}{2})} = 1$,

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} asen(x)+b = a+b$ y $f(\frac{\pi}{2}) = a+b$. Se sigue que f es continua en $\frac{\pi}{2}$ si $a+b=1$.

Por tanto f es continua en todo $\mathbb{R}$ si y sólo si $a=1$ y $b=0$.

2) (8 puntos) Determina las asíntotas, los extremos relativos y los intervalos de monotonía, convexidad y concavidad de la función $f(x)=2x^3-3x$ en $(-\infty,\infty)$ y representa gráficamente dicha función.

$dom(f) = (-\infty,\infty)$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} 2x^2-3 = \infty$

No hay asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

La función es derivable en todo $\mathbb{R}$ y $f'(x) = 6x^2-3 = 3(2x^2-1) = 0$ si $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Entonces los puntos críticos son $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Monotonía: $f'(x)>0$ si $|x|>\frac{1}{\sqrt{2}}$,

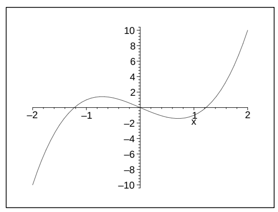
la función es creciente en $(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}})\cup(\frac{1}{\sqrt{2}},\infty)$ y decreciente en $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Por el test de la derivada primera $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ es un máximo relativo y $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ es un
mínimo relativo.

$f^{(2)}(x) = 12x$, entonces la función es cóncava en $(-\infty, 0)$ y convexa en $(0, \infty)$.

El punto $x = 0$ es un punto de inflexión.

$f(x) = x(2x^2 - 3) = 0$ si $x = 0, x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ y $f(x) > 0$ en $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0) \cup (\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty)$.



$f(x) = 2x^3 - 3x$

3) (10 puntos) Calcula el polinomio de Taylor $P_3(x; 0)$ de orden 3 de la función

$$f(x) = (x + 1)e^{-2x}$$

en un entorno del punto $x_0 = 0$.

$f(x) = (x + 1)e^{-2x}$, $\qquad f(0) = 1$,
$f'(x) = -e^{-2x} - 2xe^{-2x}$, $\qquad f'(0) = -1$,
$f^{(2)}(x) = 4xe^{-2x}$, $\qquad f^{(2)}(0) = 0$,
$f^{(3)}(x) = 4e^{-2x} - 8xe^{-2x}$ $\qquad f^{(3)}(0) = 4$.
$P_3(x; 0) = 1 - x - \frac{4}{6}x^3 = 1 - x - \frac{2}{3}x^3$.

4) (10 puntos) Una persona se encuentra a 30 metros de un punto P de una vía de tren.

Un tren se acerca por dicha vía a una velocidad de 90 Km/h.

¿Con qué razón decrece la distancia entre el tren y la persona cuando se encuentran a 50 metros de distancia?

Sean $x(t)$ la distancia entre el tren y el punto P en el instante de tiempo t e $y(t)$ la distancia entre el tren y la persona en el instante de tiempo t. Entonces $\frac{dx}{dt} = 90km/h$ y $x^2(t) + (30)^2 = y^2(t)$.

Derivando implícitamente se obtiene que $x(t)\frac{dx}{dt} = y(t)\frac{dy}{dt} \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{x(t)}{y(t)}\frac{dx}{dt}$.

Si $y(t) = 50m$, entonces $x(t) = \sqrt{(50)^2 - (30)^2} = \sqrt{1600} = 40m$ e $y(t) = -\frac{40}{50}90km/h = -72km/h$.

5) Calcula los siguientes límites:

a) (5 puntos)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{sen(x)} sen(t)\ dt}{sen(x)}.$$

Se trata de una forma indeterminada de tipo $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to 0} \int_0^{sen(x)} sen(t)\ dt = 0 = \lim\limits_{x\to 0} sen(x)$.

Además, $\frac{d}{dx}sen(x) = \cos(x) \neq 0$ en un entorno $I \setminus \{0\}$ de 0. Aplicando la regla de l'Hôpital, se obtiene que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{sen(x)} sen(t)\ dt}{sen(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{sen(sen(x))\cos(x)}{\cos(x)} = 0.$$

b) (5 puntos)

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg(x) - x}{x - sen(x)}.$$

Se trata de una forma indeterminada de tipo $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to 0} tg(x) - x = 0 = \lim\limits_{x\to 0} x - sen(x)$

Además, $\frac{d}{dx}(x - sen(x)) = 1 - \cos(x) \neq 0$ en un entorno $I \setminus \{0\}$ de 0. Aplicando la regla de l'Hôpital, se obtiene que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg(x) - x}{x - sen(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)} - 1}{1 - \cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)(1-\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\cos(x)}{\cos^2(x)} = 2.$$

6) Calcula las siguientes integrales:

a)(5 puntos) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\ dx.$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\ dx \overset{t=e^x}{=} \int \frac{dt}{t^2+1} = arctg(t) + C = arctg(e^x) + C.$$

b)(5 puntos) $\int_1^4 \ln(\sqrt{x})\ dx.$

$\int_1^4 \ln(\sqrt{x})\ dx \overset{\text{por partes}}{=} x\ln(\sqrt{x})|_1^4 - \int_1^4 x\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = 4\ln(2) - \frac{1}{2}\int_1^4 dx = \ln(16) - \frac{3}{2}$.

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

Informática de Sistemas y de Gestión *Soluciones del Examen de Septiembre*
Fecha: 6 de Septiembre, 2001 **Tiempo: 2h y 30 min**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está compuesto por 7 problemas y se valorará sobre 100 puntos.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Los primeros cuatro problemas son obligatorios y tenéis que elegir de forma clara sólo dos **de los últimos tres problemas.**

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas. Podéis consultar apuntes, pero no está permitido el uso de calculadoras. Esta hoja no hace falta entregarla. Tampoco es preciso copiar los enunciados de los problemas en el cuadernillo de examen que entreguéis.

La obtención en esta prueba de una calificación ***inferior a 50 puntos*** *supondrá una calificación de suspenso en la asignatura.*

1) (12 puntos: 2 puntos para cada apartado) Contesta **VERDADERO** o **FALSO** .

En este problema **no hace falta** justificar tus respuestas.

a) Si x es un número real, entonces $|x-3|>1 \Leftrightarrow x\in(2,4)$.

FALSO: $|x-3|>1 \Leftrightarrow x\in(-\infty,2)\cup(4,\infty)$.

b) La función $f(x)=x^2$ es inyectiva en $[-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}]\cup[0,\frac{1}{3})$.

VERDADERO: $x^2=y^2 \iff y=\pm x$ (el punto $\frac{1}{3}$ no pertenece al dominio de la función)

c) En el conjunto $A=\{a,b,c,d\}$, sea R la relación definida por
$R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,d),(d,a),(a,c),(c,d)\}$.
Entonces R es una relación de equivalencia.

FALSO: no es simétrica ya que $(a,c)\in R$, pero $(c,a)\notin R$.

d) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$ entonces existe $N\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n\geq N$ se cumple $x_n>\frac{1}{2}$.

VERDADERO: sea $\varepsilon=\frac{1}{4}$ (más en general, sea ε tal que $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$).
Por definición de límite, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n\geq N$ se cumple que $|x_n-1|<\varepsilon$.

Entonces $x_n > 1 - \varepsilon = \frac{3}{4} > \frac{1}{4}$.

e) Si x es racional, $\pi + x$ es irracional.

VERDADERO: el número $y = \pi + x$ no puede ser racional ya que $\pi = y - x$ es irracional.

f) Sea A el dominio de una función real f. Si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ convergente a $x_0 \in A$ tal que $f(x_n)$ converge a $f(x_0)$, entonces f es continua en $x_{0.}$

FALSO: para que f sea continua en x_0, la condición del enunciado tiene que valer para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ convergente a $x_0 \in A$. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{si} \quad x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \end{cases}$$

no es continua en ningún punto de $[0,1]$, pero $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = 1 = f(0)$.

2) (14 puntos) Sean $P_2(x,0) = 2x - 2$ y $Q_2(x,0) = x^2 - 3x + 1$ los polinomios de Taylor de orden 2 de dos funciones f y g, respectivamente, en un entorno del punto 0.

Halla el polinomio de Taylor de orden 2 de la función fg en un entorno de 0.

$P_2(x,0) = 2x - 2 = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2}x^2$

$Q_2(x,0) = x^2 - 3x + 1 = g(0) + g'(0)x + \frac{g^{(2)}(0)}{2}x^2$

Sea $T_2(x,0) = f(0)g(0) + (fg)'(0)x + \frac{(fg)^{(2)}(0)}{2}x^2$ el polinomio de Taylor de orden 2 de la función fg en un entorno de 0. Tenemos que determinar sus coeficientes a partir de las expresiones de $P_2(x,0)$ y $Q_2(x,0)$:

$$\begin{array}{ccc} f(0) = -2 & f'(0) = 2 & f^{(2)}(0) = 0 \\ g(0) = 1 & g'(0) = -3 & g^{(2)}(0) = 2 \end{array}$$

Entonces $f(0)g(0) = -2$, $(fg)'(0) = f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = 2 + 6 = 8$ y

$\frac{(fg)^{(2)}(0)}{2} = \frac{1}{2}(f^{(2)}(0)g(0) + 2f'(0)g'(0) + f(0)g^{(2)}(0)) = \frac{1}{2}(0 - 12 - 4) = -8.$

Se sigue que $T_2(x,0) = -2 + 8x - 8x^2$.

3) (20 puntos) Determina el dominio, las asíntotas, los límites, los extremos relativos y los intervalos de monotonía, convexidad y concavidad de la función $f(x) = | x^3 - 4x |$ y representa $f(x)$ gráficamente utilizando la información hallada.

$dom(f) = (-\infty, \infty)$.

$\lim_{n\to\pm\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{n\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm \lim_{n\to\pm\infty} |x^2 - 4| = \pm\infty$.

No hay asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

El polinomio $g(x) = x^3 - 4x = x(x^2-4) = x(x-2)(x+2)$ es igual a cero en $x = 0, x = 2, x = -2$.

En estos puntos la función f no es derivable. En $\mathbb{R} \setminus \{0, 2, -2\}$,

$f\prime(x) = sgn(g(x))(3x^2 - 4) = 0 \Longleftrightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Entonces los puntos críticos son $x = 0, x = 2, x = -2, x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ y $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Monotonía: $sgn(g(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (-2,0) \cup (2,\infty) \\ -1 & \text{si } x \in (-\infty,-2) \cup (0,2) \end{cases}$ y $3x^2-4 > 0 \Longleftrightarrow |x| > \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Por tanto $f'(x) > 0$ si $x \in (-2, -\frac{2}{\sqrt{3}}) \cup (0, \frac{2}{\sqrt{3}}) \cup (2,\infty)$ y

$f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -2) \cup (-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0) \cup (\frac{2}{\sqrt{3}}, 2)$.

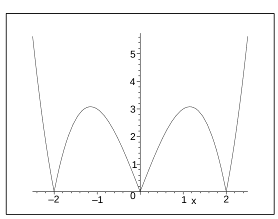
la función es creciente en $(-2, -\frac{2}{\sqrt{3}}) \cup (0, \frac{2}{\sqrt{3}}) \cup (2,\infty)$ y decreciente en $(-\infty, -2) \cup (-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0) \cup (\frac{2}{\sqrt{3}}, 2)$.

Por el test de la derivada primera $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ y $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ son máximos relativos y $x = -2, x = 0$ y $x = 2$ son mínimos relativos.

Siendo $f\prime(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4 & \text{si } x \in (-2,0) \cup (2,\infty) \\ -3x^2 + 4 & \text{si } x \in (-\infty,-2) \cup (0,2) \end{cases}$,

$f^{(2)}(x) = \begin{cases} 6x & \text{si } x \in (-2,0) \cup (2,\infty) \\ -6x & \text{si } x \in (-\infty,-2) \cup (0,2) \end{cases}$

y la función es cóncava en $(-2,0) \cup (0,2)$ y convexa en $(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$.



$f(x) = | x^3 - 4x |$

4) Calcula las siguientes integrales:

a) (8 puntos) $\int sen(\sqrt{3x})\, dx$ b) (8 puntos) $\int \frac{5x}{(x-1)(x-2)}\, dx$
c) (8 puntos) $\int_0^1 (2x+1)3^x dx.$

a) $\int sen(\sqrt{3x})\, dx \overset{y=\sqrt{3x}}{=} \frac{2}{3}\int ysen(y)dy \overset{\text{por partes}}{=} \frac{2}{3}(-y\cos(y)+\int \cos(y)dy) =$
$= -\frac{2}{3}\sqrt{3x}\cos(\sqrt{3x}) + \frac{2}{3}sen(\sqrt{3x}) + C.$

b) $\int \frac{5x}{(x-1)(x-2)}\, dx = -\int \frac{5}{x-1}dx + 10\int \frac{1}{x-2}dx = -5\ln(|x-1|) + 10\ln(|x-2|) + C.$

c) $\int_0^1 (2x+1)3^x dx \overset{\text{por partes}}{=} (2x+1)\frac{3^x}{\ln(3)}|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{3^x}{\ln(3)}dx =$
$= [(2x+1)\frac{3^x}{\ln(3)} - 2\frac{3^x}{\ln^2(3)}]|_0^1 = \frac{8}{\ln(3)} - \frac{4}{\ln^2(3)}.$

Elige sólo dos de los siguientes problemas:

5) (15 puntos) A las cuatro de la tarde un coche pasa, a una velocidad de 70 Km/h, por el punto kilométrico 400 de la autopista A-7, donde la velocidad máxima permitida es 120 Km/h. Diez minutos después pasa, circulando a una velocidad de 80 Km/h, por el punto kilométrico 425 de la citada autopista. Le para la policía y le pone una multa por exceso de velocidad. ¿Tenía razón la policía? (**Sugerencia:**utiliza el teorema del valor medio).

Sea $f(t)$ la función desplazamiento del coche. f es continua en $[4, 4+\frac{1}{6}]$ (nota que $10\,\text{min} = \frac{1}{6}h$) y derivable en $(4, 4+\frac{1}{6})$. Por el teorema del valor medio existe $c \in (4, 4+\frac{1}{6})$ tal que

$f'(c) = \frac{f(4+\frac{1}{6})-f(4)}{\frac{1}{6}} = 6(425-400) = 150km/h.$ Tenía razón la policía.

6) (15 puntos) Se define la sucesión

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = \dfrac{a_{n-1}+n}{n^2} \quad \forall n \geq 2. \end{cases}$$

a) Verificar por inducción que $\forall n \geq 1, \quad |a_n| \leq 1,$

$a_1 = 1$

Sean $n \geq 1$ y $|a_n| \leq 1$, entonces

$|a_{n+1}| = |\frac{a_n+n+1}{(n+1)^2}| \leq |\frac{a_n}{(n+1)^2}| + \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} \leq \frac{2}{n+1} \leq 1.$

b) utilizar el apartado a) para demostrar que $|a_n| \leq \frac{2}{n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$

Por el apartado a), $\forall\ n \geq 1\ \ |a_{n+1}| \leq \dfrac{2}{n+1}$ y $|a_1| = 1 \leq 2$. Entonces $|a_n| \leq \frac{2}{n}\ \ \forall\ n \geq 1$.

c) utilizar el apartado b) para demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Por el apartado b), $0 \leq |a_n| \leq \frac{2}{n}\ \ \forall\ n \geq 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$.

Aplicando el teorema del sandwich se obtiene que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

7)

a) (10 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si} \quad x \in (-\infty, 0) \\ sen(\frac{\pi x}{2}) & \text{si} \quad x \in [0,1) \\ \ln(e) & \text{si} \quad x \in [1,e] \\ \frac{x}{e} & \text{si} \quad x \in (e,\infty) \end{cases},$$

estudia su continuidad en los puntos $x = 1$ y $x = e$ y determina a para que sea continua en $x = 0$.

La función f es continua en $\mathbb{R}\backslash\{0,1,e\}$, para todo valor de la constante a, ya que todas las funciones que la definen son continuas.

En el punto $x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} sen(\dfrac{\pi x}{2}) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 + a = a$ y $f(0) = 0$. Se sigue que f es continua en $x = 0$ si $a = 0$.

En el punto $x = 1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \ln(e) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} sen(\dfrac{\pi x}{2}) = 1$ y $f(1) = 1$. Se sigue que f es continua en $x = sen(\frac{\pi x}{2}) = 1$.

En el punto $x = e$, $\lim\limits_{x\to e^+} f(x) = \lim\limits_{x\to e^+} \dfrac{x}{e} = 1$, $\lim\limits_{x\to e^-} f(x) = \lim\limits_{x\to e^-} \ln(e) = 1$ y $f(e) = 1$. Se sigue que f es continua en $x = sen(\frac{\pi x}{2}) = 1$.

Por tanto f es continua en todo $\mathbb{R}$ si y sólo si $a = 0$.

b) (5 puntos) Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int\limits_0^{x^3} e^{3t} dt.}{sen(x)}$$

Se trata de una forma indeterminada de tipo $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to 0} \int_0^{x^3} e^{3t} dt = 0 = \lim\limits_{x\to 0} sen(x)$.

Además, $\frac{d}{dx} sen(x) = \cos(x) \neq 0$ en un entorno $I \setminus \{0\}$ de 0. Aplicando la regla de l'Hôpital, se obtiene que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{x^3} e^{3t} dt}{sen(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2 e^{3x^3}}{\cos(x)} = 0.$$

Capítulo 12

Soluciones de los exámenes 2001-2002

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas (tarde)) *Soluciones del Examen Parcial*
Fecha: 18 de diciembre del 2001 **Tiempo: 1 h y 30 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por cinco problemas.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre tres puntos.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

Podéis consultar apuntes, pero no está permitido el uso de calculadoras.

1) a) Sean $A = \{x \in \mathbb{R} : |x-3| < 1\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} : |x-1|+|x+\frac{1}{2}| > 2\}$. Determina $A \cap B$ y $B \backslash A$.

$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-3| < 1\} = (2,4)$ (el conjuntos de los puntos reales a distancia menor que 1 del punto 3).

Para escribir el conjunto B en forma de unión de intervalos, consideremos los siguientes casos, determinados por los valores absolutos que definen el conjunto B.

Caso 1: $x < -\frac{1}{2}$. Se resuelve el sistema

$$\begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ -x+1-x-\frac{1}{2} > 2. \end{cases} \qquad \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ -2x > \frac{3}{2}. \end{cases} \qquad \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ x < -\frac{3}{4}. \end{cases} \qquad (-\infty, -\tfrac{3}{4}).$$

Caso 2: $-\frac{1}{2} \leq x < 1$. El sistema es

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x < 1 \\ -x+1+x+\frac{1}{2} > 2. \end{cases} \qquad \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x < 1 \\ \frac{3}{2} > 2. \end{cases} \qquad \textit{Imposible.}$$

Caso 3: $x \geq 1$. Ahora se resuleve el sistema

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x-1+x+\frac{1}{2} > 2. \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x > \frac{5}{2}. \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 1 \\ x > \frac{5}{4}. \end{cases} \qquad (\tfrac{5}{4}, \infty).$$

Entonces $B = (-\infty, -\frac{3}{4}) \cup (\frac{5}{4}, \infty)$ y

$$A \cap B = (2,4) = A \quad \text{y} \quad B \setminus A = (-\infty, -\frac{3}{4}) \cup (\frac{5}{4}, 2] \cup [4, \infty).$$

b) En el conjunto $A = \{1,2,3\}$, determina si la relación binaria

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,1),(1,3)\}$$

es una relación de equivalencia.

R no es simétrica, ya que $(2,3) \in R$ y $(3,2) \notin R$. Por tanto no puede ser de equivalencia.

2) Determina si la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{2 + \frac{n}{n+1}\cos(\frac{n\pi}{2})\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. (Sugerencia: escribe los primeros términos de la sucesión).

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{2 + \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2}), 2 + \frac{2}{3}\cos(\pi), 2 + \frac{3}{4}\cos(\frac{3\pi}{2}), 2 + \frac{4}{5}\cos(2\pi),$$

$$2 + \frac{5}{6}\cos(\frac{5\pi}{2}), \cdots\} = \{2, 2 - \frac{2}{3}, 2, 2 + \frac{4}{5}, 2, 2 - \frac{6}{7}, 2, 2 + \frac{8}{9}, \cdots\}.$$

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, ya que contiene dos subsucesiones que convergen a límites distintos:

$$\{a_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{2,2,2,\cdots\} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty}\{a_{2n-1}\} = 2,$$

$$\left\{a_{2+4(n-1)}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \{2-\frac{2}{3}, 2-\frac{6}{7}, 2-\frac{10}{11}, \cdots\} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty}\left\{a_{2+4(n-1)}\right\} = 2-1 = 1.$$

3) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por

$$\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = 2 - \frac{1}{4}|a_n| \qquad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Verifica que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es contractiva y halla su límite.

$$\forall n \geq 2, \qquad |a_{n+1} - a_n| = |-\frac{1}{4}|a_n| + \frac{1}{4}|a_{n-1}|| \leq \frac{1}{4}|a_n - a_{n-1}|.$$

Se sigue que la sucesión es contractiva con constante $C = \frac{1}{4}$ y, por tanto, converge a un número real $L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Entonces tiene que ser

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 2 - \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}|a_n| = 2 - \frac{1}{4}|L|.$$

Si $L \geq 0$, se obtiene que $L = 2 - \frac{1}{4}L, \quad L = \frac{8}{5}$.
Si $L < 0$, se obtiene que $L = 2 + \frac{1}{4}L, \quad L = \frac{8}{3}$, que es una contradicción.
Entonces $L = \frac{8}{5}$.

4) Calcula, si existen, los siguientes límites

a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{2+e^{1/x}}$

Este límite no existe:

$\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{2+e^{1/x}} = 0, \quad$ ya que $\lim_{x\to 0^+} 2 + e^{1/x} = \infty$.

$\lim_{x\to 0^-}\dfrac{1}{2+e^{1/x}} = \dfrac{1}{2}, \quad$ ya que $\lim_{x\to 0^-} 2 + e^{1/x} = 2$.

b) $\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x}sen(f(x))$, donde $f(x)$ es una función cualquiera definida en un entorno de 0.

$\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x}sen(f(x)) = 0 \quad$ ya que

$$0 \leq |\sqrt[3]{x}sen(f(x))| \leq |\sqrt[3]{x}|$$

y $\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x} = 0$ por el teorema del sandwich.

5) Estudia la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sen(3x)}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{e^{x-1}} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

y determina si la ecuación $f(x) = 0$ tiene solución en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Si $x \notin \{0, 1\}$ la función es continua ya que es un polinomio o un cociente de funciones continuas cuyo denominador no es nunca igual a cero.

$f(x)$ es continua en $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{sen(3x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} 3\frac{sen(3x)}{3x} = 3,$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 - 2x + 3 = 3.$$

$f(x)$ es discontinua en $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} x^2 - 2x + 3 = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{e^{x-1}} = 1.$$

Ahora, $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado y acotado $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ y

$$f(-\frac{\pi}{2}) = \frac{sen(-\frac{3\pi}{2})}{-\frac{\pi}{2}} = -\frac{-2}{\pi} < 0 \quad \text{y} \quad f(0) = 3 > 0.$$

Por el teorema de la raíz, $f(x)$ tiene una raíz en $(-\frac{\pi}{2}, 0)$.

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas y Gestión) *Soluciones del Examen Final A*

(Evaluación continua)

Fecha: 7 de Febrero del 2002 **Tiempo: 3 horas**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está compuesto por 5 problemas y se valorará sobre 65 puntos.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas. Esta hoja no hace falta entregarla. Tampoco es preciso copiar los enunciados de los problemas en el cuadernillo de examen que entreguéis.

Podéis consultar apuntes, pero no está permitido el uso de calculadoras.

1) a) (7 puntos) Encuentra un valor de p y otro de q para que la sucesión definida como

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = pa_n + q \qquad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

sea contractiva. En tal caso calcula el límite.

$$\forall n \geq 1, \qquad |a_{n+2} - a_{n+1}| = |pa_{n+1} + q - pa_n - q| = |p||a_{n+1} - a_n|.$$

Si $0 < |p| < 1$ y $q \in \mathbb{R}$, la sucesión es contractiva con constante $C = |p|$ y

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = p \lim_{n\to\infty} a_n + q = pL + q, \qquad L = \frac{q}{1-p}.$$

b) (6 puntos) Si $p = 1$, encuentra el término general de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, y halla los valores de q para que sea convergente. (Sugerencia: Determinar los primeros términos de la sucesión).

Si $p = 1$, $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + q. \end{cases}$

Los términos de la sucesión son:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1 + q,\ a_3 = 1 + q + q = 1 + 2q, \cdots,\ a_n = 1 + (n-1)q, \cdots.$$

(Verificar por inducción.) Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad q > 0, \\ -\infty & \text{si} \quad q < 0, \\ 1 & \text{si} \quad q = 0. \end{cases}$$

Se sigue que si $p = 1$ la sucesión es convergente sólo si $q = 0$.

2) (13 puntos) Calcula los máximos y mínimos absolutos de $f(x) = 2x^{\frac{5}{3}} + 5x^{\frac{2}{3}}$ en el intervalo $[-2, 1]$.

La función $f(x) = 2x^{\frac{5}{3}} + 5x^{\frac{2}{3}}$ es continua en $[-2, 1]$ y, por tanto, tiene máximo y mínimo absolutos.

$f(x)$ no es derivable en $x = 0$, ya que la función $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$ no es derivable en $x = 0$. ($\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{x\to 0} x^{-\frac{1}{3}}$ y este límite no existe.)

Si $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{10}{3}x^{\frac{-1}{3}} = \frac{10}{3}(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{-1}{3}}) = \frac{10}{3}(\frac{x+1}{x^{\frac{1}{3}}}).$$

Los puntos críticos de $f(x)$ en $(-2, 1)$ son $x = 0$ y $x = -1$.

$$f(0) = 0, \quad f(-1) = 3, \quad f(1) = 7,$$
$$f(-2) = 2(-2)^{\frac{5}{3}} + 5(-2)^{\frac{2}{3}} = (-2)^{\frac{2}{3}}(-4 + 5) = \sqrt[3]{4}.$$

1 es un máximo absoluto y 0 un mínimo absoluto.

3) a) (7 puntos) Halla el polinomio de Taylor de orden 3 de $f(x) = (1 + e^x)^2$.

$$\begin{cases} f(x) = (1 + e^x)^2 & f(0) = 4, \\ f'(x) = 2(1 + e^x)e^x = 2e^x + 2e^{2x} & f'(0) = 4, \\ f^{(2)}(x) = 2e^x + 4e^{2x} & f^{(2)}(0) = 6, \\ f^{(3)}(x) = 2e^x + 8e^{2x} & f^{(3)}(0) = 10. \end{cases}$$

$$P_3(x;0) = 4 + 4x + 3x^2 + \frac{5}{3}x^3.$$

b) (6 puntos) Demuestra que $(1+e^x)^2 \geq 4(1+x)\ \forall x \geq 0$.

Sea $f(x) = (1+e^x)^2 - 4(1+x)$. Entonces $f(0) = 4 - 4 = 0$, y

$$f'(x) = 2(1+e^x)e^x - 4 = 2(e^x + e^{2x} - 2) > 0 \quad \text{si} \quad x > 0.$$

Por tanto $f(x)$ es creciente en $[0, \infty)$ y $f(x) = (1+e^x)^2 - 4(1+x) \geq 0$, es decir, $(1+e^x)^2 \geq 4(1+x)$.

(También: de a) se sigue que $(1+e^x)^2 = P_1(x;0) + \frac{2e^c+4e^{2c}}{2}x^2 > 4+4x$.)

4) a) (7 puntos) Para que valores de $a, b \in \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{3}\int_0^x e^{-t^2}\, dt & \text{si } x \leq 0, \\ ax + b & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

es continua, y para que valores es derivable, en el punto 0.

Por el teorema fundamental del cálculo, la función $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$ es derivable (entonces también continua) en $\mathbb{R}$, siendo e^{-t^2} una función continua en $\mathbb{R}$. La función $ax+b$ también es derivable (y continua) en todo $\mathbb{R}$, siendo un polinomio.

Se sigue que $f(x)$ ed derivable (y continua) en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Para estudiar la continuidad de $f(x)$ en el punto $x = 0$ calculamos los límites:

$$\lim_{x\to 0^+} ax + b = b \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^-} 1 - \frac{1}{3}F(x) = 1 - \frac{1}{3}0 = 1.$$

Se sigue que $f(x)$ es continua en $x = 0$ solamente si $b = 1$.

Si $b \neq 1$, la función $f(x)$ no puede ser derivable en $x = 0$.

Sea $b = 1$. Para estudiar la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$ calculamos los límites siguientes:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1 - \frac{1}{3}F(x) - 1}{x} = -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0^-} \frac{F(x)}{x} \overset{(0/0)}{=}$$

$$= -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-x^2}}{1} = -\frac{1}{3},$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{ax+1-1}{x} = a.$$

Entonces $f(x)$ es derivable en $x=0$ sólo si $a=-\frac{1}{3}$ y $b=1$.

b) (6 puntos) Halla el límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x\int_0^x e^{t^2}\,dt}{e^{x^2}}$$

utilizando la Regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x\int_0^x e^{t^2}\,dt}{e^{x^2}} \overset{(\infty/\infty)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2\int_0^x e^{t^2}\,dt + 2xe^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2}\,dt}{xe^{x^2}} + 1 \overset{(\infty/\infty)}{=}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}} + 1 = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+2x^2} + 1 = 1.$$

5) (13 puntos) Para que valores de a la función

$$f(x) = \begin{cases} \int_{-\frac{1}{2}}^{x} \frac{t}{(t-1)(t^2+1)}\,dt & \text{si } -\frac{1}{2} < x \le 0, \\ a\int_x^{\pi^2} \sqrt{t}sin(\sqrt{t})\,dt & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

es continua en el punto 0.

Siendo $\frac{t}{(t-1)(t^2+1)}$ continua en $(-\frac{1}{2}, 0]$, por el teorema fundamental del cálculo

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{t}{(t-1)(t^2+1)}\,dt.$$

Ahora,

$$\frac{t}{(t-1)(t^2+1)} = \frac{t-1}{(t-1)(t^2+1)} + \frac{1}{(t-1)(t^2+1)} =$$

$$= \frac{1}{t^2+1} + \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{1}{t^2+1} + \frac{At^2+A+Bt^2+Ct-Bt-C}{(t-1)(t^2+1)} =$$

$$= \frac{1}{t^2+1} + \frac{(A+B)t^2+(C-B)t+(A-C)}{(t-1)(t^2+1)}.$$

Para determinar las constantes A, B y C resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C-B=0 \\ A-C=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} B=-A=-\frac{1}{2} \\ C=B=-A=\frac{1}{2} \\ A=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Se sigue que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{1}{2}arctan(t)|_{-\frac{1}{2}}^{0} + \frac{1}{2}[ln(|t-1|) - \frac{1}{2}ln(t^2+1)]_{-\frac{1}{2}}^{0} =$$

$$= \frac{1}{2}arctan(0) - \frac{1}{2}arctan(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}[ln(1) - \frac{1}{2}ln(1) - ln(\frac{3}{2}) + \frac{1}{2}ln(\frac{5}{4})] =$$

$$\frac{1}{2}arctan(\frac{1}{2}) - \frac{1}{4}ln(\frac{9}{4}) + \frac{1}{4}ln(\frac{5}{4}) = \frac{1}{2}arctan(\frac{1}{2}) + \frac{1}{4}ln(\frac{5}{9}).$$

Siendo $\sqrt{t}sen(\sqrt{t})$ continua en $[0,\pi^2]$, por el teorema fundamental del cálculo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = a\int_0^{\pi^2} \sqrt{t}sen(\sqrt{t})\,dt.$$

Calculamos la integral haciendo el cambio de variable

$$u=\sqrt{t}\,(u>0), \quad du = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt, \quad dt = 2udu.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = a\int_0^{\pi} 2u^2 sin(u)\,du \overset{porpartes}{=} 2a\,[-u^2cos(u)|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2ucos(u)\,du] \overset{porpartes}{=}$$

$$= 2a[-u^2cos(u)|_0^{\pi} + 2usen(u)|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} sin(u)\,du] = 2a[\pi^2+2cos(\pi)-2] = 2a[\pi^2-4].$$

Se sigue que $f(x)$ es continua en $x=0$ si $a = \frac{\frac{1}{2}arctan(\frac{1}{2})+\frac{1}{4}ln(\frac{5}{9})}{2\pi^2-8}$.

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas y Gestión) *Soluciones del Examen Final A*

(Evaluación no continua)

Fecha: 7 de Febrero del 2002 **Tiempo: 3 horas y media**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está compuesto por siete problemas y se valorará sobre 100 puntos.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Los primeros cinco problemas son obligatorios y tenéis que elegir de forma clara sólo uno **de los últimos dos problemas.**

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas. Esta hoja no hace falta entregarla. Tampoco es preciso copiar los enunciados de los problemas en el cuadernillo de examen que entreguéis.

La obtención en esta prueba de una calificación inferior a 50 puntos supondrá una calificación de suspenso en la asignatura.

Podéis consultar apuntes, pero no está permitido el uso de calculadoras.

1) a) (7 puntos) Dadas las gráficas de las relaciones f, g y h en las figura 6 determina

i) cual(es) de las tres figuras es la gráfica de una función.

De las gráficas se deduce que f, g y h son funciones.

ii) cual(es) de las tres figuras es la gráfica de una función inyectiva.

De las gráficas se deduce que f, g y h no son inyectivas.

iii) ¿en que puntos las funciones del apartado i) no son derivables?

De las gráficas se deduce que

- f no es derivable en $x = 1$ y en el punto de corte de la gráfica de f con el eje x.
- g no es derivable en $x = 1, 2$.
- h no es derivable en el punto $x = 1$.

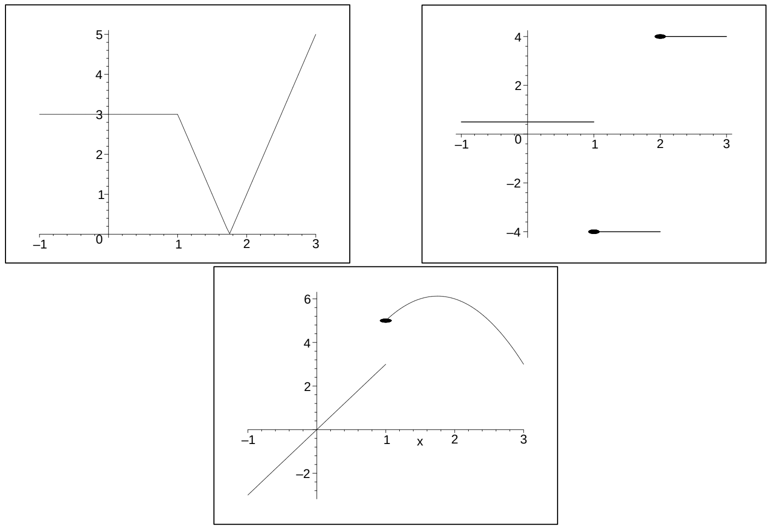


Figura 12.1: f, g y h,

b) (7 puntos) Sean $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 2\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R}^+ : |ln(ax)| > 2\}$. Determina el valor de la constante $a > 0$ tal que $B \backslash A = (0, \frac{1}{ae^2})$.

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 2\} = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty).$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}^+ : |ln(ax)| > 2\}, \qquad (a > 0).$$

$$ln(ax) = 2 \Leftrightarrow ax = e^2 \Leftrightarrow x = \frac{e^2}{a}.$$

Ahora, $|ln(ax)| = \begin{cases} ln(ax) & \text{si} \quad x \geq \frac{1}{a} \\ -ln(ax) & \text{si} \quad x < \frac{1}{a}. \end{cases}$

Por tanto

$$\text{si} \quad x \geq \frac{1}{a}, \quad ln(ax) > 2 \Leftrightarrow x > \frac{e^2}{a}$$

y

$$\text{si} \quad x < \frac{1}{a}, \quad -ln(ax) > 2 \Leftrightarrow ln(ax) < -2 \Leftrightarrow x < \frac{1}{ae^2}.$$

Entonces,

$$B = (0, \frac{1}{ae^2}) \cup (\frac{e^2}{a}, \infty),$$

$$B \setminus A = \left[(0, \frac{1}{ae^2}) \cup (\frac{e^2}{a}, \infty)\right] \setminus \left[(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)\right] \quad \text{y}$$

$$B \setminus A = (0, \frac{1}{ae^2}) \Leftrightarrow (\frac{e^2}{a}, \infty) = (\sqrt{2}, \infty) \Leftrightarrow \frac{e^2}{a} = \sqrt{2} \Leftrightarrow a = \frac{e^2}{\sqrt{2}}.$$

2) (15 puntos) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_n = (3 - \frac{1}{n})sen(n).$$

a) Determina si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada.
Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n| = |(3 - \frac{1}{n})sen(n)| \leq 3 - \frac{1}{n} \leq 3.$$

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada por 3.

b) Estudia la convergencia de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
La función $sen(x)$ oscila entre -1 y 1 y $3 - \frac{1}{n} > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
La sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no puede tener límite igual a cero, ya que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(3 - \frac{1}{n})sen(n) \neq 0$ y existen $n_1 > n$ y $n_2 > n$ tales que

$$(3 - \frac{1}{n_1})sen(n_1) < 3(-\frac{1}{2}) < -\frac{3}{2},$$

$$(3 - \frac{1}{n_2})sen(n_2) > 3(\frac{1}{2}) > \frac{3}{2}.$$

Tampoco puede converger a un número $L \neq 0$, ya que $\forall n \in \mathbb{N}$ existen $n_1 > n$ y $n_2 > n$ tales que $a_{n_1} > 0$ y $a_{n_2} < 0$.

c) ¿ Es cierto que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ continene una subsucesión monótona convergente?
Si: toda sucesión acotada contiene una subsucesión monótona convergente.

3) (16 puntos) Estudia la continuidad y derivabilidad en $\mathbb{R}$ de la función

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\int_0^x cos(2t)dt}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 \quad \text{si} & x = 0. \end{cases}$$

El dominio de $f(x)$ es todo $\mathbb{R}$.

Si $x \neq 0$, $f(x)$ es derivable siendo el cociente de dos funciones derivables y $\frac{d}{dx}2x = 2 \neq 0$.

Si $x = 0$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{sen(2x)}{2x} - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{sen(2x) - 2x}{2x^2} \overset{(0/0)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2cos(2x) - 2}{4x} = 0.$$

Se sigue que $f(x)$ es derivable y continua en $\mathbb{R}$.

4) (20 puntos) Determina las asíntotas, los extremos relativos y los intervalos de monotonía, convexidad y concavidad de la función $f(x) = |x^3(x-4)| - 1$ en $(-\infty, \infty)$ y representa gráficamente dicha función. Prueba que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución en el intervalo $(0, 1)$.

$$f(x) = \begin{cases} x^3(x-4) - 1 & \text{si} \quad x^3(x-4) \geq 0 \\ -x^3(x-4) - 1 & \text{si} \quad x^3(x-4) < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x^4 - 4x^3 - 1 & \text{si} \quad x \in (-\infty, 0] \cup [4, \infty) \\ -x^3(x-4) - 1 & \text{si} \quad x \in (0, 4). \end{cases}$$

Ya que el dominio de $f(x)$ es todo $\mathbb{R}$ y $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$, la función no tiene asíntotas verticales y horizontales.

Si $x \notin \{0, 4\}$, la función $f(x)$ es derivable siendo un polinomio y

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3) & \text{si} \quad x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty) \\ -4x^3 + 12x^2 = -4x^2(x-3) & \text{si} \quad x \in (0, 4) \end{cases}$$

y $f'(x) = 0$ si $x = 3$.

Si $x = 0$,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^4 - 4x^3 - 1 + 1}{x} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^4 + 4x^3 - 1 + 1}{x} = 0.$$

Entonces $f(x)$ es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = 0$.

Si $x = 4$,

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4^-} \frac{-x^4 + 4x^3 - 1 + 1}{x - 4} = \lim_{x \to 4^-} \frac{-x^3(x-4)}{x - 4} = -4^3,$$

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4^+} \frac{x^4 - 4x^3 - 1 + 1}{x - 4} = \lim_{x \to 4^-} \frac{x^3(x-4)}{x - 4} = 4^3.$$

Entonces $f(x)$ no es derivable en $x = 4$.

Se sigue que los puntos críticos de $f(x)$ son $x = 0, 3, 4$.

Monotonía:

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{si} \quad x \in (0,3) \cup (4, \infty), \\ < 0 & \text{si} \quad x \in (-\infty, 0) \cup (3,4). \end{cases}$$

Por tanto, $f(x)$ es creciente en $(0,3) \cup (4, \infty)$ y es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (3,4)$.

$x = 0$ y $x = 4$ son mínimos relativos y $x = 3$ es un máximo relativo.

Convexidad:

$$f''(x) = \begin{cases} 12x^2 - 24x = 12x(x-2) & \text{si} \quad x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty) \\ -12x(x-2) & \text{si} \quad x \in (0,4) \end{cases}$$

y

$$f''(x) \begin{cases} > 0 & \text{si} \quad x \in (-\infty, 2) \cup (4, \infty) \\ = 0 & \text{si} \quad x = 2 \\ < 0 & \text{si} \quad x \in (2,4). \end{cases}$$

Se sigue que $f(x)$ es convexa en $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$, cóncava en $(2,4)$ y que $x = 2$ y $x = 4$ son puntos de inflexión.

La función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado y acotado $[0,1]$ y $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 2 > 0$. Por el teorema de la raíz, $f(x)$ tiene una raíz en $(0,1)$. Esa raíz es única siendo $f(x)$ estrictamente creciente en $(0,1)$.

$$f(0) = f(4) = -1, \quad f(3) = 26.$$

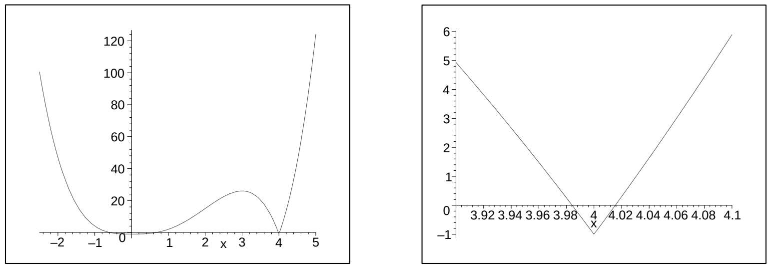


Figura 12.2: $f(x) = |x^3(x-4)| - 1$

5) (20 puntos) Calcula las siguientes integrales:
a)

$$\int \frac{6x^2-24}{x^4-5x^2+4}dx = 6\int \frac{x^2-4}{x^4-5x^2+4}dx.$$

Sea $y = x^2$. Entonces

$$x^4 - 5x^2 + 4 = y^2 - 5y + 4 = (y-1)(y-4) = (x^2-1)(x^2-4) \quad \text{y}$$

$$\frac{x^2-4}{x^4-5x^2+4} = \frac{x^2-4}{(x^2-1)(x^2-4)} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} =$$

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x + (A-B)}{x^2-1}.$$

NOTA: la función $\frac{6x^2-24}{x^4-5x^2+4}$ no está definida en $x = \pm 1$.
Para determinar A y B, resolvemos el sistema

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} B = -\frac{1}{2} \\ A = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Entonces,

$$\int \frac{6x^2-24}{x^4-5x^2+4}dx = \frac{6}{2}\left[\int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{1}{x+1}dx\right] = 3ln(|\frac{x-1}{x+1}|) + C.$$

b) $\int_0^1 \frac{ln(x)}{x}dx$
Ya que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{ln(x)}{x} = -\infty$, la integral es impropia de segunda especie.

Siendo

$$\lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \frac{ln(x)}{x}dx = \lim_{c\to 0^+}\left(\frac{ln^2(x)}{2}\right)|_c^1 = \lim_{c\to 0^+}\left(0-\frac{ln^2(c)}{2}\right) = -\infty,$$

la integral diverge.

Elige sólo uno de los siguientes problemas:

6) (15 puntos) Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 alrededor del origen para la función

$$f(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} e^t sen(t)dt.$$

$$\int e^t sen(t)dt \overset{porpartes}{=} e^t sen(t) - \int e^t cos(t)dt =$$

$$\overset{porpartes}{=} e^t sen(t) - e^t cos(t) - \int e^t sen(t)dt.$$

Entonces $\int e^t sen(t)dt = \frac{e^t}{2}\left(sen(t) - cos(t)\right) + C$ y

$$f(0) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^t sen(t)dt = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[e^{-\frac{\pi}{2}} - 1\right],$$

$$f'(x) \overset{TFCI}{=} e^x sen(x) \qquad f'(0) = 0,$$

$$f''(x) = e^x sen(x) + e^x cos(x) \qquad f''(0) = 1,$$

$$P_2(f;0) = \frac{1}{2}\left[e^{-\frac{\pi}{2}} - 1\right] + \frac{x^2}{2}.$$

7) (15 puntos) Sean $f(x) = \int_0^x e^{t^2}dt$ y $g(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}$.

Verifica que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ y calcula $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$.

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{t^2}dt \geq \lim_{x\to\infty}\int_0^x 1dt = \lim_{x\to\infty} x = \infty,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{2x} \overset{(\infty/\infty)}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2xe^{x^2}}{2} = \infty,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}\overset{(\infty/\infty)}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt+2xe^{x^2}}{2xe^{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}+1=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}+1=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+2x^2}+1=1.$$

Universidad Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas y de Gestión) *Soluciones del Examen de septiembre*
Fecha: 6 de septiembre de 2002 **Tiempo: 9:00 a 13:00**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

La respuesta a cada uno de los problemas se valorará sobre el número de puntos indicado.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

Podéis consultar apuntes y libros, pero no está permitido el uso de calculadoras.

1) (1 punto) Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Estudia si la función $f(x) = x^5 + ax^4 + b$, $x \in \mathbb{R}$, posee, al menos, una raíz real (es decir, si existe algún $x_0 \in \mathbb{R}$ con $f(x_0) = 0$).

La función $f(x) = x^5 + ax^4 + b$ es continua en $\mathbb{R}$, siendo un polinomio. Ya que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$

se sigue que la función alcanza valores positivos y negativos. Por el teorema de la raíz, la función $f(x) = x^5 + ax^4 + b$, $x \in \mathbb{R}$, posee, al menos, una raíz real.

2) (2 puntos) Halla el valor de

$$\int_2^\infty \frac{x+3}{x^3 - x^2 + x - 1}\, dx.$$

Si $x \neq 1$, y operando de la forma usual,

$$\frac{x+3}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}.$$

La integral es impropia de primera especie y converge si el siguiente límite

$$\lim_{c\to\infty} \int_2^c \frac{x+3}{x^3 - x^2 + x - 1}\, dx$$

existe (es finito).
Ahora,

$$\frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2+(C-B)x+(A-C)}{(x-1)(x^2+1)}.$$

Entonces, tiene que ser:

$$\begin{cases} A+B = & 0 \\ C-B = & 1 \\ A-C = & 3, \end{cases} \quad \begin{cases} B & = -A \\ C & = 1-A \\ A-1+A & = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} B = & -2 \\ C = & -1 \\ A = & 2. \end{cases}$$

Entonces, para $c \geq 2$,

$$\int_2^c \frac{x+3}{x^3-x^2+x-1}\,dx = \int_2^c \frac{2}{x-1}\,dx - \int_2^c \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \int_2^c \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= 2ln|x-1||_2^c - ln|x^2+1||_2^c - arctg(x)|_2^c = ln(\frac{(c-1)^2}{c^2+1}) + ln(5) - arctg(c) + arctg(2).$$

La función $ln(x)$ es continua y

$$\lim_{c\to\infty} ln(\frac{(c-1)^2}{c^2+1}) = ln(\lim_{c\to\infty}\frac{(c-1)^2}{c^2+1}) = ln(\lim_{c\to\infty}\frac{(1-1/c)^2}{1+1/c^2}) = ln(1) = 0,$$

Ya que $\lim_{c\to\infty} arctg(c) = \frac{\pi}{2}$, se sigue que

$$\int_2^\infty \frac{x+3}{x^3-x^2+x-1}\,dx = ln(5) - \frac{\pi}{2} + arctg(2).$$

3) (1 punto) Estudia si el conjunto

$$A = \left\{6 + \frac{1}{\sqrt{n+5}} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

tiene supremo, ínfimo, máximo y mínimo.

A es el conjunto imagen de la sucesión $\{a_n\} = \{6 + \frac{1}{\sqrt{n+5}}\}$.

Siendo

$$\forall n \geq 1, \qquad \frac{1}{\sqrt{n+5}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)+5}} = \frac{1}{\sqrt{n+6}},$$

la sucesión $\{a_n\}$ es estríctamente decreciente y tiene valor máximo $6+\frac{1}{\sqrt{6}}$, que es también su supremo.

Su ínfimo es igual a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 6$, que no es un mínimo, ya que $a_n > 6, \forall n \geq 1$.

4) (1.5 puntos) ¿Cuál es el área más grande que puede tener un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tenga 5 cm de largo?

Sean x e y las longitudes de los catetos del triángulo del problema y A su área. Entonces

$$A = \frac{xy}{2} \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 = 25.$$

Por tanto,

$$y = \sqrt{25 - x^2} \quad \text{y} \quad A(x) = \frac{x\sqrt{25-x^2}}{2}.$$

Se trata de hallar el máximo de la función continua $A(x)$ sobre el intervalo cerrado y acotado $[0, 5]$.

$$A'(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{25-x^2} + \frac{x(-2x)}{2\sqrt{25-x^2}}) = \frac{25-2x^2}{2\sqrt{25-x^2}}.$$

El único punto crítico en $(0, 5)$ es $x = \frac{5}{\sqrt{2}}$, además $A(0) = A(5) = 0$. Se sigue que el área máxima es $A(\frac{5}{\sqrt{2}}) = \frac{25}{4} cm^2$.

5) (1 punto) Estudia

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{8}{9}\right)^n + \left(\frac{16}{15}\right)^n} = 0.$$

6) (0.5 puntos) Estamos interesados en resolver la integral indefinida

$$\int \sec^2(x) \tan(x)\, dx.$$

La sustitución $u = \tan(x)$ da por resultado

$$\int \sec^2(x)\tan(x)\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\tan^2(x)}{2} + C.$$

La sustitución $v = \sec(x)$ da por resultado

$$\int \sec^2(x)\tan(x)\,dx = \int v\,dv = \frac{v^2}{2} + C = \frac{\sec^2(x)}{2} + C.$$

¿Pueden ambos resultados ser correctos?

$$\frac{\tan^2(x)}{2} + C = \frac{\sin^2(x)}{2\cos^2(x)} + C,$$

$$\frac{\sec^2(x)}{2} + C = \frac{1}{2\cos^2(x)} + C = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{2\cos^2(x)} + C =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sin^2(x)}{2\cos^2(x)} + C = \frac{\sin^2(x)}{2\cos^2(x)} + (C + \frac{1}{2}).$$

Ya que una integral indefinida es una familia infinita de funciones que son iguales salvo una constante, ambos resultados son correctos.

7) (2 puntos) Dada la función

$$y(x) = \frac{3}{4}\left(x^2-1\right)^{\frac{2}{3}},$$

a) estudia la derivabilidad de $y(x)$,
La función está definida en $\mathbb{R}$ y es derivable si

$$x^2 - 1 \neq 0 \leftrightarrow x \neq \pm 1,$$

ya que la función x^2 es siempre derivable y la función $\sqrt[3]{x}$ lo es si $x \neq 0$.
Si $x = 1$,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{y(x)-y(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{3}{4}\frac{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{3}{4}\frac{(x-1)^{\frac{2}{3}}\,(x+1)^{\frac{2}{3}}}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{3}{4}\frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} = \infty.$$

De forma similar, si $x = -1$,

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{y(x)-y(1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{3}{4}\frac{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{3}{4}\frac{(x-1)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{2}{3}}}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to -1^+} \frac{3}{4}\frac{(x-1)^{\frac{2}{3}}}{(x+1)^{\frac{1}{3}}} = \infty.$$

La función $y(x) = \frac{3}{4}(x^2-1)^{\frac{2}{3}}$ no es derivable en $x = \pm 1$.

b) determina las asíntotas, los extremos relativos y los intervalos de monotonía, convexidad y concavidad de la función $y(x)$ y representa gráficamente dicha función.

Estando definida la función en $\mathbb{R}$, no hay asíntotas verticales. Tampoco hay asíntotas horizontales, ya que $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = \infty$.

Si $x \neq \pm 1$, $y'(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$, y $y'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Los únicos puntos críticos son $x = 0, 1, -1$.

Monotonía: $y'(x) \begin{cases} > 0 & \text{si} \quad x \in (-1,0) \cup (1,\infty), \\ < 0 & \text{si} \quad x \in (-\infty,-1) \cup (0,1). \end{cases}$

La función $f(x)$ es creciente en $(-1,0)$ y en $(1,\infty)$ y es decreciente en $(-\infty,-1)$ y en $(0,1)$.

Por tanto $x = 1$ y $x = -1$ son mínimos relativos y $x = 0$ es un máximo relativo. De hecho, $x = 1$ y $x = -1$ son mínimos absolutos y no existe un máximo absoluto.

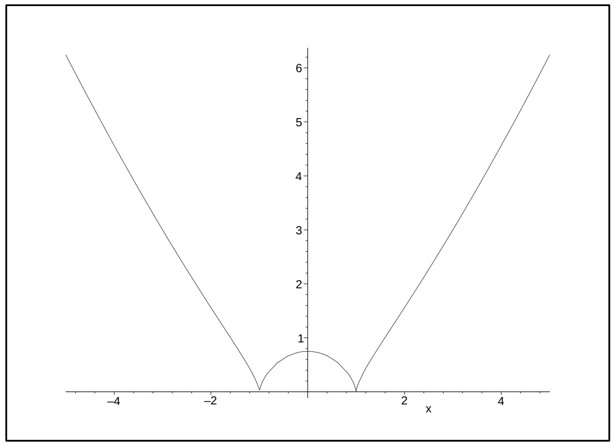
Si $x \neq \pm 1$, $y''(x) = \frac{x^2-3}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$.

Convexidad y concavidad:

$$y''(x) \begin{cases} > 0 & \text{si} \quad |x| > \sqrt{3}, \\ = 0 & \text{si} \quad x = \pm\sqrt{3}, \quad \text{puntos de inflexión} \\ < 0 & \text{si} \quad |x| < 1 \quad \text{ó} \quad 1 < |x| < \sqrt{3}. \end{cases}$$

La función $f(x)$ es convexa en $(-\infty,-\sqrt{3})$ y en $(\sqrt{3},\infty)$ y es cóncava en $(-1,1)$, $(-\sqrt{3},-1)$ y en $(1,\sqrt{3})$. (La concavidad de la función en los últimos dos intervalos no se puede apreciar en la siguiente figura obtenida utilizando Maple V.)

$$y(\pm 1) = 0, \quad y(0) = \frac{3}{4}, \quad y(\pm\sqrt{3}) = \frac{3}{4}\sqrt[3]{4}.$$



8) (1 punto) Se dice que el *orden de contacto* de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ en un punto x_0 es igual a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ si se verifica que

$$f(x_0) = g(x_0) \quad \text{y} \quad f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) \quad \forall\, k = 1, \ldots, n.$$

Dadas las funciones

$$f(x) = \int_0^{2x^2+x} sen(t)\, dt \qquad \text{y} \qquad g(x) = ax^2 + bx + c,$$

halla $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tengan en $x_0 = 0$ orden de contacto máximo.

Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ están definidas en todo $\mathbb{R}$, donde son derivables un número arbitrario de veces por el teorema fundamental del cálculo y por ser $sen(x)$ y $g(x)$ infinitamente derivables.

$$f(0) = \int_0^0 sen(t)\, dt = 0 \qquad \text{y} \qquad g(0) = c \qquad \Rightarrow c = 0.$$

$$f'(x) = sen(2x^2 + x)(4x + 1) \qquad \text{y} \qquad g'(x) = 2ax + b,$$

$$f'(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad g'(0) = b \qquad \Rightarrow b = 0.$$

$$f''(x) = cos(2x^2 + x)(4x + 1)^2 + 4sen(2x^2 + x) \qquad \text{y} \qquad g''(x) = 2a,$$

$$f''(0) = 1 \qquad \text{y} \qquad g''(0) = 2a \qquad \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

El orden de contacto será maximo para los valores de a, b, c encontrados. (Calculando la tercera derivada de la $f(x)$ en $x = 0$, se puede verificar que su valor, 12, es distinto de $g^{(3)}(0) = 0$. Por tanto el orden de contacto máximo de estas dos funciones es $n = 2$.)

Bibliografía

[A] T. J. Apostol, *Calculus,* vol. 1. Ed. Reverté, 1998.

[ABGM] J. Amillo, F. Ballesteros, R. Guadalupe, L. J. Martín, *Cálculo (Conceptos, Ejercicios y Sistemas de Computación Matemática).* Ed. McGraw-Hill, 1996.

[B] J. de Burgos Román, *Cálculo Infinitesimal de una Variable.* Ed. McGraw-Hill,1997.

[BS] R. G. Bartle y D. R. Sherbert, *Introducción al análisis matemático de una variable.* Ed. Limusa (2^a Edición), 1996.

[BSm] G. L. Bradley y K. J.Smith, *Cálculo de una variable,* vol. 1. Ed.Prentice Hall, 1999.

[D] B. P. Demidóvich, *5000 problemas de análisis matemático.* Ed. Paraninfo, 1998.

[G] J. L. García Valle, *Matemáticas especiales para computación.* Ed. McGraw-Hill, 1988.

[GG] A. García,F. García, A. Gutiérrez,A. López, G. Rodríguez, A. de la Villa, *Cálculo I.* Ed. CLAGSA, 1993.

[LHE] R. E. Larson, R. P. Hostetler, B. H. Edwards, *Cálculo y Geometría Analítica,* vol. 1. Ed. McGraw-Hill, 1995.

[NPS] A.Ñevot, J. M. Poncela y J. Soler, *Apuntes y Problemas de Matemática Superior.* Ed. Taurus Universitaria, 1994.

[K] M. Krasnov et al., *Curso de matemáticas superiores para ingenieros,* vol. 1. Ed. Mir-Rubiños, 1994.

[P] D. Pestana, J.M. Rodríguez, E. Romera, E. Touris, V. Álvarez, A. Portilla, *Curso práctico de Cálculo y Precálculo*, Editorial Ariel, 2000,

[S] J. Stewart, *Calculus.* Ed. Brooks/Cole Publishing Company, 1995.