

BASES DE MATEMÁTICAS

PROBLEMAS RESUELTOS CON MAPLE V

Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas y de Gestión

Alessandra Gallinari

2002

Introducción

Esta publicación contiene una colección de algunos de los problemas de la asignatura de Bases de Matemáticas para las titulaciones de Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas y de Gestión de la Escuela Superior de Ciencias Experimentales y Tecnología (ESCET). Los ejercicios se propusieron a los alumnos durante las prácticas y los exámenes desarrollados con el sistema Maple V en los años académicos 1999-2000, 2000-2001 y 2001-2002.

En la segunda parte del manual se presentan soluciones completas. Es indispensable que el alumno trabaje sobre cada cuestión e intente llegar a sus propias conclusiones antes de leer las soluciones incluidas.

Los problemas, en su mayoría, no son originales. Se utilizaron ejercicios (unas veces sin modificarlos, otras proponiendo variaciones de ellos) existentes en la bibliografía incluída al final de esta publicación.

Agradecimientos

Quiero agradecer al profesor Regino Criado su participación en la elaboración del material relativo a los exámenes y los problemas de las prácticas con Maple V durante el año académico 1999-2000, al profesor Roberto Muñoz su participación en la elaboración del material relativo a los exámenes y las soluciones de los problemas de las prácticas con Maple V durante el año académico 2000-2001 y al profesor Ariel Sánchez su participación en la elaboración del material relativo a los exámenes durante el año académico 2001-2002.

Gracias también a los alumnos que han señalado erratas y errores en versiones previas.

Índice General

I Problemas	7
1 Cuestiones sobre números complejos	9
1.1 Cuestiones sobre números complejos (1999-2000):	9
1.2 Cuestiones sobre números complejos (2000-2001):	12
2 Cuestiones sobre límites	15
2.1 Cuestiones sobre límites (1999-2000)	15
2.2 Cuestiones sobre límites (2000-2001)	18
3 Cuestiones sobre derivación	21
3.1 Cuestiones sobre derivadas e integrales (1999-2000):	21
3.2 Cuestiones sobre derivación (2000-2001):	25
4 Cuestiones sobre integración	31
4.1 Cuestiones sobre integración (2000-2001):	31
II Exámenes	35
5 Exámenes (1999-2000)	37
6 Exámenes (2000-2001)	55
7 Exámenes (2001-2002)	73

III	Soluciones de los problemas	79
8	Soluciones números complejos	81
8.1	Soluciones números complejos (1999-2000)	81
8.2	Soluciones números complejos (2000-2001)	86
9	Soluciones límites	91
9.1	Soluciones límites (1999-2000)	91
9.2	Soluciones límites (2000-2001)	99
10	Soluciones derivación	107
10.1	Soluciones derivación e integración (1999-2000)	107
10.2	Soluciones derivación (2000-2001)	115
11	Soluciones integración	125
11.1	Soluciones integración (2000-2001)	125
IV	Soluciones de los exámenes	133
12	Soluciones de los exámenes (1999-2000)	135
13	Soluciones de los exámenes (2000-2001)	161
14	Soluciones de los exámenes (2001-2002)	187

Parte I
Problemas

Capítulo 1

Cuestiones sobre números complejos

1.1 Cuestiones sobre números complejos (1999-2000):

1. La parte imaginaria de $\sqrt{2 - 2I}$ es :

- a) $\sqrt{\sqrt{2} - 1}$
- b) $\sqrt{\sqrt{2} + 1}$
- c) $-\sqrt{\sqrt{2} - 1}$

2. El argumento de $\sqrt{3} - 1 + I(\sqrt{3} + 1)$ es:

- a) $\arctan\left(\frac{-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}\right)$
- b) $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$
- c) $\frac{1\pi}{4}$

3. Las soluciones de la ecuación $|z|^4 = |z|^2 + 2$ son:

- a) no existen soluciones
- b) $1 - 1$
- c) $-\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$

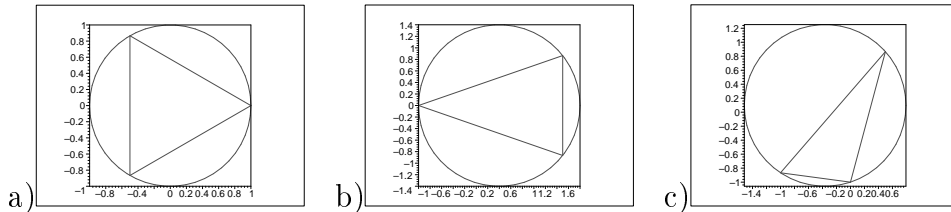
4. Las soluciones de la ecuación $z^3 \bar{z} + 3z^2 - 4 = 0$ son:

- a) no existen soluciones
- b) $z = 1$ y $z = -1$ son soluciones
- c) $z = -2$ es solución

5. Las soluciones de la ecuación $z^3 = 1$ son:

- a) $0, -\frac{3}{2} + \frac{1I\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2} - \frac{1I\sqrt{3}}{2}$
- b) $1, -\frac{1}{2} + \frac{1I\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{1I\sqrt{3}}{2}$
- c) $2, \frac{1}{2} + \frac{1I\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1I\sqrt{3}}{2}$

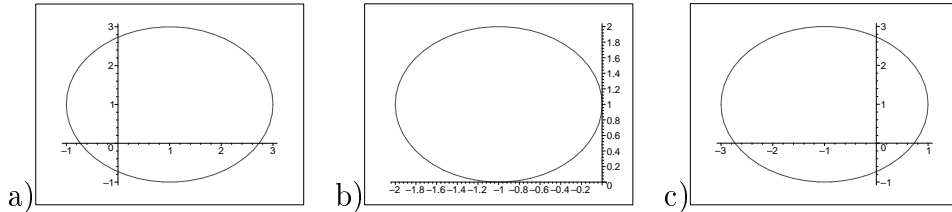
6. La representación gráfica de las soluciones de la ecuación $z^3 = 1$ como vértices de un triángulo es:



7. La forma polar de $\frac{(I-1)^5}{(I+1)^4}$ es:

- a) polar($\sqrt{2}, \frac{1\pi}{4}$)
- b) polar($\frac{1\sqrt{2}}{2}, -\frac{1\pi}{4}$)
- c) polar($\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}$)

8. La representación gráfica en el plano real del entorno de radio 2 del punto $1 + I$ es:



9. La expresión $\text{polar}(r, t)^2 * \text{polar}(s, u)$ es igual a:

- a) $\text{polar}(r^2 s, t + u)$
- b) $\text{polar}(r^2 s, 2t + u)$
- c) $\text{polar}(r s, 2t + u)$

10. La forma $a + bI$ del número complejo \sqrt{i} es:

- a) $\frac{1\sqrt{2}}{2} + \frac{1I\sqrt{2}}{2}$
- b) $\frac{1\sqrt{2}}{2} - \frac{1I\sqrt{2}}{2}$
- c) $1 + I$

1.2 Cuestiones sobre números complejos (2000-2001):

1. La parte imaginaria de $\sqrt{5I - \frac{12+\sqrt{-5}}{13I-6}}$ es :

a) $\frac{1\sqrt{84050\sqrt{\left(\frac{1097}{205} - \frac{13\sqrt{5}}{205}\right)^2 + \left(\frac{6\sqrt{5}}{205} + \frac{156}{205}\right)^2} - 449770 + 5330\sqrt{5}}{410}$

b) $\frac{1\sqrt{2\sqrt{7056 + (245 - 7\sqrt{5})^2} + 168}}{14}$

c) $\frac{1\sqrt{84050\sqrt{\left(\frac{72}{205} - \frac{13\sqrt{5}}{205}\right)^2 + \left(\frac{1181}{205} + \frac{6\sqrt{5}}{205}\right)^2} - 29520 + 5330\sqrt{5}}{410}$

2. El argumento de $\sqrt{5I - \frac{12+\sqrt{-5}}{13I-6}}$ es:

a) $\arctan\left(\frac{\sqrt{\sqrt{245746 - 1740\sqrt{5} + 24 + 5\sqrt{5}}}}{\sqrt{\sqrt{245746 - 1740\sqrt{5} - 24 - 5\sqrt{5}}}}\right)$

b) $\arctan\left(\frac{\sqrt{\sqrt{1400970 + 12300\sqrt{5} - 72 + 13\sqrt{5}}}}{\sqrt{\sqrt{1400970 + 12300\sqrt{5} + 72 - 13\sqrt{5}}}}\right)$

c) $\arctan\left(\frac{\sqrt{\sqrt{1400970 + 12300\sqrt{5} + 72 - 13\sqrt{5}}}}{\sqrt{\sqrt{1400970 + 12300\sqrt{5} - 72 + 13\sqrt{5}}}}\right)$

3. Los números I^5 , I^{13} , I^{249} y de I^{34513} son:

- a) Iguales a $-I$ o a 1
- b) Iguales a 1 o a -1
- c) Todos iguales a I

4. Se considere la ecuación $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$, entonces:

- a) no existen soluciones
- b) $z = 1$ y $z = 2$ son soluciones

1.2. CUESTIONES SOBRE NÚMEROS COMPLEJOS (2000-2001): 13

c) $z = -2$ es una solución

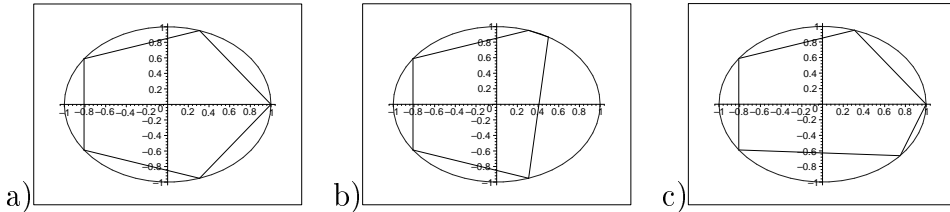
5. Las soluciones de la ecuación $z^5 = 1$ son:

a) $-1, -\frac{1\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1I\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4},$
 $\frac{1\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1I\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}, \frac{1\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1I\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}, -\frac{1\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1I\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}$

b) $1, \frac{1\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1I\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}, -\frac{1\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1I\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4},$
 $-\frac{1\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1I\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}, \frac{1\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1I\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}$

c) $-I\left(\frac{1\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1I\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}\right), -I\left(-\frac{1\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1I\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}\right),$
 $-I\left(-\frac{1\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1I\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}\right), -I\left(\frac{1\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1I\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}\right), -I$

6. La representación gráfica de las soluciones de la ecuación $z^5 = 1$ como vértices de un polígono es:



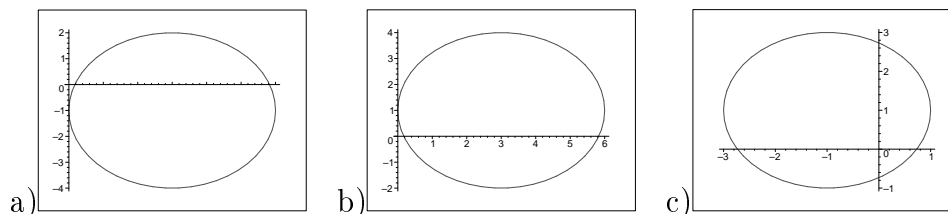
7. La forma polar de $\ln(3 + 3I)$ es:

a) polar($\frac{1\sqrt{4\ln(18)^2+\pi^2}}{4}, -\arctan(\frac{1\pi}{2\ln(18)})$)

b) polar($\left(\frac{1\sqrt{\ln(13)^2+4\arctan(\frac{3}{2})^2}}{2}, \arctan\left(\frac{2\arctan(\frac{3}{2})}{\ln(13)}\right)\right)$)

c) polar($\frac{1\sqrt{4\ln(18)^2+\pi^2}}{4}, \arctan(\frac{1\pi}{2\ln(18)})$)

8. La representación gráfica en el plano real del entorno de radio 3 del punto $3 - I$ es:



9. Sea x un número real. Las expresiones $a = \frac{e^{Ix} + e^{-Ix}}{2}$ y $b = \frac{e^{Ix} - e^{-Ix}}{2I}$ son tales que:

- a) $a = \cos(x)$ y $b = \sin(2x)$
- b) $a = \cos(x)$ y $b = \sin(x)$
- c) $a = \sin(x)$ y $b = \cos(x)$

10. Sabiendo que la condición que tienen que cumplir tres números complejos \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} , con \mathbf{u} distinto de \mathbf{w} , para estar alineados, es que el cociente $\frac{\mathbf{u}-\mathbf{v}}{\mathbf{u}-\mathbf{w}}$ sea un número real, encontrar el lugar geométrico de los complejos $\mathbf{z}=\mathbf{a}+I\mathbf{b}$ tales que $\mathbf{1}$, \mathbf{z} y \mathbf{z}^2 estén alineados.

- a) $\{b = 0, a = a\}$, $\{a = a, b = \sqrt{-a^2 + 2a}\}$, $\{a = a, b = -\sqrt{-a^2 + 2a}\}$
- b) $\{b = 0, a = a\}$, $\{b = \sqrt{-a^2 - 2a}, a = a\}$, $\{b = -\sqrt{-a^2 - 2a}, a = a\}$
- c) $\{b = 0, a = a\}$, $\{a = a, b = \sqrt{-a^2 - a}\}$, $\{a = a, b = -\sqrt{-a^2 - a}\}$

Capítulo 2

Cuestiones sobre límites de sucesiones y de funciones

2.1 Cuestiones sobre límites de sucesiones y de funciones (1999-2000):

1. Sea $a(n) = (5^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$. Utilizando un grafo para establecer la convergencia o divergencia de la sucesión $\{a(n)\}$, se verifica que :

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n)$ no existe
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n) = 5$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n) = 3$

> `restart;`

2. Sea $a(n) = \arctan(2n/(2n+1))$. Utilizando un grafo para establecer la convergencia o divergencia de la sucesión $\{a(n)\}$, se verifica que :

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n)$ no existe
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n) = 1$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n) = \frac{\pi}{4}$

> `restart;`

3. Sea $a(n) = (\sin(3/n)) / (1/n)$. Utilizando un grafo para establecer la convergencia o divergencia de la sucesión $\{a(n)\}$, se verifica que :

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n) = 3$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n)$ no existe

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n) = \infty$

> **restart;**

4. En la aproximación de la raíz r del polinomio $x^3 - 7x + 2 = 0$ contenida en el intervalo $(0,1)$ por medio de la sucesión

$x(1) = \frac{1}{2}$, $x(n+1) = \frac{1x(n)^3}{7} + \frac{2}{7}$ (para todo $n \geq 1$) (ver ejemplo 4 de la teoría de esta Práctica), el valor de $|r - x(6)|$ es menor que

a) .0003373594336

b) .0002530195752

c) .005060391504

> **restart;**

5. Sean $f(x) = 1/x$ y $g(x) = 2x^2 - x - 2$. Estudiar el límite de "g o f" (la función compuesta de g con f) en el punto $x=0$. Se verifica que :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = \infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(f(x))$ y $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(f(x))$ son distintos

c) $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = -\frac{1}{2}$

> **restart;**

6. Utilizando un grafo para determinar un número δ tale que $|\frac{x+1}{x-1} - 3| < \frac{1}{5}$ si $|x - 2| < \delta$, se obtiene que

a) $\delta = .05$

b) $\delta = .5$

c) $\delta = .1$

> **restart;**

7. Para todo x en $(-1,1)$, sea $f(x) := \frac{1}{x^n}$. Utilizando un grafo para $n=2,3, 4$ y 5 , se deduce que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n}$

a) es igual a ∞ para todo n

b) no existe si n es impar y es igual a ∞ si n es par

c) no existe si n es par y es igual a ∞ si n es impar

> **restart;**

8. Sea $f(x) := \frac{\sin(x-2)}{2^x-4}$. Mirando al grafo de f sobre un intervalo que contenga 2, el límite de f en el punto 2 parece ser (con una aproximación de 10 dígitos) igual a

a) .3609568912

b) .3606737603

c) .3601337601

> restart;

9. Utilizar el teorema de compresión y los grafos de las funciones $f(x) := -x^2$, $g(x) := x^2 \cos(20\pi x)$ y $h(x) := x^2$ para demostrar que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ es igual

a

a) -1

b) 0

c) 1

> restart;

10. Sea $f(x)$ la función que a cada número real x le asocia el mayor número entero menor o igual a x . Su definición en Maple V es la siguiente : $f := x \rightarrow \text{floor}(x)$.

Los límites de $f(x)$ por la derecha y por la izquierda en el punto 3 son:

a) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \text{floor}(x)$ no existe y $\lim_{x \rightarrow 3^-} \text{floor}(x) = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \text{floor}(x) = 3$ y $\lim_{x \rightarrow 3^-} \text{floor}(x)$ no existe

c) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \text{floor}(x) = 3$ y $\lim_{x \rightarrow 3^-} \text{floor}(x) = 2$

> restart;

2.2 Cuestiones sobre límites de sucesiones y de funciones (2000-2001):

1. Sea $a_n = \frac{((2n)!)^{\frac{1}{n}}}{n}$ el término de orden n de la sucesión $\{a_n\}$.
Se verifica que:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ no existe
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{4}{e}$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4e$

> **restart;**

2. Sea r un número real y sea $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\left(\frac{r n^2 + 1}{2^n}\right)}$ el término de orden n de la sucesión $\{a_n\}$. Calcula r para que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = (e)^2$.

- a) $r = 2$
- b) no existe ningún tal r .
- c) $r = 4$

> **restart;**

3. Sea $a_n = \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{2^{\frac{1}{n}} - 1}$ el término de orden n de la sucesión $\{a_n\}$.

Mirando a la gráfica de la sucesión, establecer su convergencia o divergencia. Se verifica que :

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n) = \frac{1}{\ln(2)}$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n)$ no existe
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n) = \infty$

> **restart;**

4. El polinomio $x^3 - 7x + 2 = 0$ contiene una raíz r en el intervalo $(0,1)$.
Si se aproxima r por medio de la sucesión

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

$$, x_{n+1} = \frac{x_n^3}{7} + \frac{2}{7} \quad (\text{para todo } n \geq 1) \quad (\text{ver ejemplo 5 del apartado$$

Límites de sucesiones de la teoría de esta Práctica), decidir si el valor de

$$|r - x_8| \text{ es menor que}$$

- a) .00004425998400

b) .0003098198880

c) .0009294596639

Cómo en el ejemplo 5, $|x_n - r| \leq \frac{3^{(n-1)}}{7^{(n-2)20}}$ y, para $n=8$, se obtiene que $|r - x_8|$ es menor que el valor

> **restart;**

5. Sea $f(x) = x$ y sea $g(x)$ la función definida a trozos por $g(2)=1$ y $g(x)=3$ si x es distinto de 2.

Estudiar los límites laterales de " $g \circ f$ " (la función compuesta de g con f) en el punto $x=2$.

Se verifica que :

a) $\lim_{x \rightarrow 2} g(f(x)) = 3$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(f(x))$ y $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(f(x))$ son distintos

c) $\lim_{x \rightarrow 2} g(f(x)) = 1$

> **restart;**

6. Observando la gráfica, encuentra un número δ tal que $|2x^2 - 18| < \frac{1}{5}$ si $|x - 3| < \delta$.

a) $\delta = .01$

b) $\delta = .05$

c) $\delta = .02$

> **restart;**

7. Estudia la función definida en \mathbb{R} por

$$f(x) = x(e)^{\left(-\frac{1}{x}\right)}$$

si $x < 0$, $f(x)=0$ si $x=0$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ si $0 < x$.

a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} x(e)^{\left(-\frac{1}{x}\right)} = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + 1} = 1$

b) sus límites laterales en 0 son distintos

c) la función es continua en $x = 0$

> **restart;**

8. Dada la ecuación $2x^4 - 14x^2 + 14x - 1 = 0$, utiliza el teorema de la raíz para verificar que

a) existe una solución real en $(-5,-4)$

b) existe una solución real en $(0,1)$ y otra en $(1,1.5)$

c) no tiene soluciones

> restart;

9. Utilizar el teorema del encaje y las gráficas de las funciones $f(x) := -x$, $g(x) := x(e)^{\frac{x}{x+1}}$ y $h(x) := x e$ para demostrar que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ es igual a

a) -1

b) 0

c) 1

> restart;

10. Sea $f(x)$ la función que a cada número real x le asocia el mayor número entero menor o igual a x . Su definición en Maple V es la siguiente : $f := x \rightarrow \text{floor}(x)$.

Los límites de $f(x)$ por la derecha y por la izquierda en el punto 8 son:

a) $\lim_{x \rightarrow 8^+} \text{floor}(x)$ no existe y $\lim_{x \rightarrow 8^-} \text{floor}(x) = 7$

b) $\lim_{x \rightarrow 8^+} \text{floor}(x) = 8$ y $\lim_{x \rightarrow 8^-} \text{floor}(x)$ no existe

c) $\lim_{x \rightarrow 8^+} \text{floor}(x) = 8$ y $\lim_{x \rightarrow 8^-} \text{floor}(x) = 7$

> restart;

Capítulo 3

Cuestiones sobre derivación

3.1 Cuestiones sobre derivadas e integrales (1999-2000):

1. La función derivada de la función $\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$ es igual a la función

- a) $\frac{y-1}{y+1}$
- b) $-\frac{2}{(y+1)(y-1)}$
- c) $\frac{2y}{(y-1)^2}$

> restart;

2. El valor de la función derivada décima de la función anterior, $\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$, en el punto 3 es

- a) la función derivada décima no existe
- b) $\frac{264535040}{729}$
- c) $\frac{2900205}{8192}$

3. ¿Cuáles son los puntos en los que hay que evaluar la función $f(x) = |x - 3| + 2x$ en el intervalo $I = [0,5]$ para determinar sus extremos?

- a) 0,3,5
- b) 0
- c) 3,5

> restart;

4. Un avión se dispone a iniciar la maniobra de aterrizaje cuando se encuentra a una distancia $r = 10000$ metros de la cabecera de la pista y a una altura $h = 3000$ metros. Si en ese momento vuela con una velocidad horizontal constante u , queremos determinar un polinomio cúbico cuyo grafo pudiera seguirse como trayectoria aceptable de aproximación.

¿Cuáles de los siguientes polinomios sería una solución a nuestro problema? :

- a) $-.60000000000 \cdot 10^{-9} x^3 + .90000000000 \cdot 10^{-5} x^2$
- b) $-.60000000000 \cdot 10^{-8} x^3 + .000090000000000 x^2$
- c) $-.60000000000 \cdot 10^{-5} x^3 + .0090000000000 x^2$

> restart;

5. Sea $f(x) = x^3 - 9x + 1$. Dibuja su grafo y utiliza el método de Newton para aproximar una raíz a partir de los valores $x(0) = 0$ y $x(0) = 3$. Se verifica que:

- a) el método no converge en los dos casos
- b) el método converge si $x(0) = 0$ y no converge si $x(0) = 3$
- c) el método converge en los dos casos

> restart;

3.1. CUESTIONES SOBRE DERIVADAS E INTEGRALES (1999-2000):23

6. Sean $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = x-1/2$ en $(0,1)$.

El área de la región limitada por $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = 0$ y $x = 1$ es:

- a) $-\frac{2}{3}$
- b) $\frac{3}{2}$
- c) $\frac{2}{3}$

> **restart;**

7. Sean $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = x-1/2$ en $(0,1/2)$.

El volumen del solido de revolución obtenido rotando alrededor del eje de las x la región limitada por $y = f(x)$, $y = g(x)$,

$x = 0$ y $x = 1/2$ es:

- a) $\frac{61\pi}{160}$
- b) $-\frac{61\pi}{160}$
- c) $\frac{9\pi}{20}$

> **restart;**

8. La ecuación $x^3 + y^3 = 9xy$ determina una curva llamada "folium de Descartes". Dibuja el grafo de esta curva y encuentra la expresión de $\frac{\partial}{\partial x} y$.

- a) $\frac{\partial}{\partial x} y(x) = \frac{1(9y-3x^2)}{3y(x)^2}$
- b) $\frac{\partial}{\partial x} y(x) = -\frac{1(-3x^2+9y(x))}{9x}$
- c) $\frac{\partial}{\partial x} y(x) = \frac{-3x^2+9y(x)}{3y(x)^2-9x}$

> **restart;**

9. El polinomio de Taylor de orden 3 de la función $f(x) = e^{(2x-2)}$ en un entorno de $x=0$ es:

a) $e^{(-2)} + 2e^{(-2)}x + 2e^{(-2)}x^2 + \frac{4e^{(-2)}x^3}{3}$

b) $1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3}$

c) $e^{(-1)} + 2e^{(-1)}x + 2e^{(-1)}x^2 + \frac{4e^{(-1)}x^3}{3}$

> **restart;**

10. El valor de la integral impropia $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$ es:

a) $2\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$

c) la integral no converge

> **restart;**

3.2 Cuestiones sobre derivación (2000-2001):

En los siguientes tres problemas se analizan algunas tasas de cambio relevantes en aplicaciones de la teoría de la derivación a la **economía** y al **comercio**. Por tanto, fijamos la notación básica utilizada.

> #presiona return cuando termines de leer

Términos básicos:

x es el número de unidades producidas (o vendidas),

$p(x)$ es el precio por unidad que una empresa puede fijar si vende x unidades (**función de demanda**).

$R(x) = x p(x)$ es el **ingreso total** obtenido por la ventas de x unidades,

$C(x)$ es el **coste total** de producción de x unidades,

$c(x) = C(x)/x$ es el **coste medio** por unidad,

$P(x) = R(x) - C(x)$ es el **beneficio total** al vender x unidades.

El **punto de equilibrio** es el número de unidades para el cuál $R(x)=C(x)$.

> #presiona return cuando termines de leer

Términos marginales:

$\frac{\partial}{\partial x} R(x)$ es el **ingreso marginal**, $\frac{\partial}{\partial x} C(x)$ es el **coste marginal** y $\frac{\partial}{\partial x} P(x)$ es el **beneficio marginal**.

Estas funciones representan las tasas de cambio de las funciones $R(x)$, $C(x)$, y $P(x)$.

1. Sea x es el número de unidades de un producto producido por una empresa.

Se verifica que si x es un **mínimo para la función coste medio $c(x)$** y un **máximo para la función beneficio total $P(x)$** , entonces

- $c(x) = \frac{\partial}{\partial x} C(x) = \frac{\partial}{\partial x} R(x)$
- $c(x) = \frac{\partial}{\partial x} C(x)$ y $\frac{\partial}{\partial x} P(x) = \frac{\partial}{\partial x} R(x)$

c) $c(x) = \frac{\partial}{\partial x} P(x)$

> `restart;`

2. En la comercialización de un producto se ha comprobado que la función demanda viene dada por

$$p(x) = \frac{500}{\sqrt{x}}$$

pesetas.

El coste de producción de x unidades es $C(x) = 5x + 5000$.

Se verifica que el precio por unidad para el el que se consigue un beneficio máximo es igual a

a) 20 pesetas

b) 10 pesetas

c) 15 pesetas

> `restart;`

3. El coste $C(x)$ de pedido y transporte de las componentes utilizadas en la fabricación de un cierto producto es

$$C(x) = 100 \left(\frac{200}{x^2} + \frac{x}{x+30} \right) \quad (1 \leq x)$$

donde $C(x)$ se mide en miles de dólares y x es el tamaño del pedido en cientos de unidades. El tamaño x que minimiza el coste es

a) 10.62505428

b) 13.55695401

c) 40.44724133

> `restart;`

4. En el intervalo $[-20,20]$ la función $f(x) = \frac{x^2+7x+3}{x^2}$

- a) tiene un máximo absoluto
- b) no tiene extremos relativos
- c) tiene un mínimo absoluto

> `restart;`

5. El valor de la función derivada de orden 5 de la función $\tan(\cos(2x^4 - \ln(2x)))$, en el punto $x=1$ es

- a) -54109.3060
- b) -214.0054479
- c) la derivada de la función no existe en $x=1$

> `restart;`

6. ¿Cuáles son los puntos en los que hay que evaluar la función $f(x) = |4x^3 - \frac{5x}{2}|$

para determinar sus extremos en el intervalo $I = [-1/4, 1/4]$?

- a) $-1/4, 1/4$
- b) 0
- c) $-1/4, 0, 1/4$

> `restart;`

7. La derivada de la función $y(x)$ definida implícitamente por la ecuación

$$x^2 y(x)^2 = (y(x) + 1)^2 (4 - y(x))$$

es igual a

a) $\frac{\partial}{\partial x} y(x) = -\frac{2xy(x)^2}{2x^2y(x)+3y(x)^2-12}$

b) $\frac{\partial}{\partial x} y(x) = -\frac{2xy(x)^2}{2x^2y(x)-4y(x)+3y(x)^2-7}$

c) $\frac{\partial}{\partial x} y(x) = -\frac{2xy(x)^2}{2x^2y(x)+4y(x)+3y(x)^2-15}$

> `restart;`

8. Sean $g(x) = x^4$ y $h(x) = x+3$. Dibuja sus gráficas y utiliza el método de Newton con punto inicial $z=1.5$ para aproximar, con siete decimales, las coordenadas x de uno de sus puntos de intersección. Se verifica que para obtener el grado de precisión pedido hay que aplicar el procedimiento **newton:=proc(f,z,n)** (ver teoría de esta práctica) a la función $f(x) = g(x)-h(x)$ con

a) n al menos igual a 2

b) n al menos igual a 3

c) n al menos igual a 4

> `restart;`

9. El polinomio de Taylor de orden 5 de la función $f(x) = 2^{\ln(3x^3+2)}$ en un entorno de $x=0$ es:

a) $1.616806672 + 1.681027479 x^3 - .3868710161 x^6$

b) $1.616806672 + 1.681027479 x^3$

c) $2.141486065 + 1.484365028 x^3$

> `restart;`

10. Si $R(x)$ denota la *reacción* de un cuerpo a algún estímulo de tamaño x , la *sensibilidad* $S(x)$ se define como

la tasa de cambio de la reacción respecto de x .

Por ejemplo, si la intensidad x de una fuente de luz crece, el ojo reacciona disminuyendo el área $R(x)$ de la pupila según la fórmula experimental

$$R(x) = \frac{40 + 24 x^{(\frac{2}{5})}}{1 + 4 x^{(\frac{2}{5})}}$$

si $0 \leq x$.

Mirando a una gráfica, se observa que:

a) $R(x)$ y $S(x)$ son decrecientes

b) $R(x)$ y $S(x)$ son crecientes

c) $R(x)$ es decreciente y $S(x)$ es creciente

> `restart;`

> `#fin`

Capítulo 4

Cuestiones sobre integración

4.1 Cuestiones sobre integración (2000-2001):

1. Estudia la convergencia o la divergencia de la integral $\int_0^{\infty} \frac{1}{(e)^x+15} dx$

a) La integral diverge

b) La integral converge a $\frac{1\ln(e+15)}{15} - \frac{1}{15}$

c) La integral converge a $\frac{4\ln(2)}{15}$

> `restart;`

2. Estudia la convergencia o la divergencia de la integral $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} dx$.

a) La integral converge a .9772817885

b) La integral converge a $\frac{1\ln(e+15)}{15} - \frac{1}{15}$

c) La integral converge a .3473148625

> `restart;`

3. Sea $F(x) = \left(\int_0^x e^{(t^2)} dt\right)^2$ y sea $G(x) = e^{(x^2)}$. Se puede verificar que $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = \infty$.

Utilizando la regla de L'Hôpital para calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{G(x)}$ se verifica que este límite es igual a

a) 3

b) 0

c) no existe

> restart;

4. Sean $f(x) = x^2 - 6$ y $g(x) = 12 - x^2$ en $[-5,5]$.

El área de la región limitada por $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = -5$ y $x = 5$ es:

- a) $\frac{392}{3}$
- b) $-\frac{392}{3}$
- c) $\frac{376}{3}$

> restart;

5. Hallar el área encerrada por la gráfica de la función $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ entre $x=0$ y $x=4$.

- a) 3
- b) 4
- c) -2

> restart;

6. Hallar el área encerrada por la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y su asíntota.

- a) 2π
- b) π
- c) $\frac{\pi}{2}$

> restart;

7. Sean $f(x) = x^2 - 6$ y $g(x) = 12 - x^2$ en $[-5,5]$. (Ver Problema 4)

El volumen del sólido de revolución obtenido rotando alrededor del eje de las x la región limitada por

$y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = -5$ y $x = 5$ es:

- a) 784π
- b) -784π
- c) 608π

> restart;

8. Sea C la circunferencia de radio 2 con centro en el punto $(3,0)$. La ecuación que define C es $(x - 3)^2 + y^2 = 4$.

El volumen del sólido de revolución obtenido rotando alrededor del eje de las y la región limitada por C es:

- a) $24\pi^2$
- b) $12\pi^2$
- c) $6\pi^2$

> restart;

9. Halla el valor de la constante C tal que la integral impropia $\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1} - \frac{C}{3x+1} dx$ converge.

a) la integral diverge para todo valor de C

b) $C = 0$

c) $C = 3$

> **restart;**

10. Verifica que la integral impropia $\int_{-\infty}^\infty x dx$ diverge. Ahora calcula $\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c x dx$.

Se verifica que:

a) $\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c x dx$ diverge

b) $\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c x dx = \frac{1}{2}$

c) $\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c x dx = 0$

> **restart;**

Parte II
Exámenes

Capítulo 5

Exámenes (1999-2000)



Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas y Gestión) *Examen A*

Fecha: Febrero de 2000 **Tiempo: 50 minutos**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

*El examen está formado por seis problemas cada uno de ellos valorado sobre **dos puntos**. En la respuesta a cada ejercicio hay que incluir los comandos de Maple empleados para obtenerla.*

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $a(n) = (1 + 3n)^{\frac{1}{n}}$. Si la sucesión converge, halla su límite. (Puedes utilizar un grafo para visualizar la convergencia o la divergencia de la sucesión).

2. Calcula el valor de la integral $\int_0^4 f(x)dx$ donde f es la función $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(3x) & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \operatorname{arctan}(x) & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$.

3. Halla el valor de la derivada segunda de la función $f(x) = \frac{\sec(x)}{1+\tan(x)}$ en el punto $x = 1$.

4. Encuentra el polinomio de Taylor de orden 5 de la función $f(x) = 3x^5 - 4x^3 + 2x - 6$ en un entorno del punto $x_0 = 1$.

5. Sean $f(x) = \sqrt{3x - 1}$ y $g(x) = \frac{1}{\ln(x)}$. Estudia el límite de la función $g \circ f$ en el punto $x_0 = 1$. (\ln denota el logaritmo neperiano).

6. Halla la forma polar de $\frac{2+3I}{1-5I}$.



Universidad
Rey Juan Carlos

Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas y Gestión) *Examen B*

Fecha: Febrero de 2000 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por seis problemas cada uno de ellos valorado sobre dos puntos. En la respuesta a cada ejercicio hay que incluir los comandos de Maple empleados para obtenerla.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

- Halla el argumento de $\frac{3}{4-3i}$.
- Sean $f(x) = \frac{2x+1}{3x+2}$ y $g(x) = \frac{2x-1}{2-3x}$. Estudia el límite de la función $g \circ f$ en el punto $x_0 = 1$.
- Encuentra el polinomio de Taylor de orden 5 de la función $f(x) = 3(x-1)^6 + 4x - 4$ en un entorno del punto $x_0 = 0$.

4. Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $a(n) = \frac{\operatorname{sen}^2(n)}{n}$. Si la sucesión converge, halla su límite. (Puedes utilizar un grafo para visualizar la convergencia o la divergencia de la sucesión).

5. Halla el valor de la derivada segunda de la función $f(x) = \operatorname{cot}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$ en el punto $x = 1$.

6. Calcula el valor de la integral $\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ donde f es la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \arctan(x) & \text{si } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$



Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas y Gestión) *Examen C*

Fecha: Febrero de 2000 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

*El examen está formado por seis problemas cada uno de ellos valorado sobre **dos puntos**. En la respuesta a cada ejercicio hay que incluir los comandos de Maple empleados para obtenerla.*

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

1. Encuentra el polinomio de Taylor de orden 6 de la función $f(x) = \ln(x+1)$ en un entorno del punto $x_0 = 0$. (\ln denota el logaritmo neperiano)

2. Calcula el valor de la integral $\int_0^4 f(x)dx$ donde f es la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -2 \ln(x) & \text{si } 1 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

3. Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $a(n) = \frac{\ln(2+e^n)}{3^n}$. Si la sucesión converge, halla su límite. (Puedes utilizar un grafo para visualizar la convergencia o la divergencia de la sucesión).

4. Sean $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}$ y $g(x) = \arcsen(x)$. Estudia el límite de la función $g \circ f$ en el punto $x_0 = \frac{1}{2}$.

5. Halla la forma binómica $(a + bI)$ de $(2\sqrt{3} + 2I)^5$.

6. Encuentra la expresión de $\frac{dy}{dx}$ si la relación entre y y x está dada por la ecuación $\text{sen}(x + y) = y^2 \cos(x)$.



Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas y Gestión) *Examen D*

Fecha: Febrero de 2000 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

*El examen está formado por seis problemas cada uno de ellos valorado sobre **dos puntos**. En la respuesta a cada ejercicio hay que incluir los comandos de Maple empleados para obtenerla.*

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

1. Encuentra la expresión de $\frac{dy}{dx}$ si la relación entre y y x está dada por la ecuación $x = \frac{1-\sqrt{y}}{1+\sqrt{y}}$.

2. Calcula las soluciones de la ecuación $z^4 + 11z^2 + 18 = 0$.

3. Sean $f(x) = \frac{1}{x+2}$ y $g(x) = x + \frac{1}{x}$. Estudia el límite de la función $g \circ f$ en el punto $x_0 = -1$.

4. Encuentra el polinomio de Taylor de orden 7 de la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$ en un entorno del punto $x_0 = 0$.

5. Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $a(n) = \int_{1+\frac{1}{n}}^{2-\frac{1}{n}} \frac{1}{x} dx$. Si la sucesión converge, halla su límite. (Puedes utilizar un grafo para visualizar la convergencia o la divergencia de la sucesión).

6. Calcula el valor de la integral $\int_{-1}^1 f(x)dx$ donde f es la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x)}{x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \end{cases} .$$



Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas y Gestión) *Examen E*

Fecha: Febrero de 2000 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

*El examen está formado por seis problemas cada uno de ellos valorado sobre **dos puntos**. En la respuesta a cada ejercicio hay que incluir los comandos de Maple empleados para obtenerla.*

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

1. Halla las raíces cúbicas de $1 + I$.

2. Sean $f(x) = \arctan\left(\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}\right)$ y $g(x) = \left|\frac{1}{x}\right|$. Estudia el límite de la función $g \circ f$ en el punto $x_0 = 0$.

3. Estudia la convergencia de integral impropia $\int_e^\infty f(x)dx$ donde $f(x) = \frac{1}{x[\ln(x)]^2}$.
(\ln denota el logaritmo neperiano)

4. Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $a(n) = \frac{\sqrt[3]{n} + \sqrt[4]{n}}{\sqrt{n} + \sqrt[5]{n}}$. Si la sucesión converge, halla su límite. (Puedes utilizar un grafo para visualizar la convergencia o la divergencia de la sucesión).

5. Encuentra el polinomio de Taylor de orden 4 de la función $f(x) = \sqrt{x+1}$ en un entorno del punto $x_0 = 0$.

6. Encuentra la expresión de $\frac{dy}{dx}$ si la relación entre y y x está dada por la ecuación $\sqrt{x+y} + \sqrt{xy} = 6$.



Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas y Gestión) *Examen F*

Fecha: Febrero de 2000 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

*El examen está formado por seis problemas cada uno de ellos valorado sobre **dos puntos**. En la respuesta a cada ejercicio hay que incluir los comandos de Maple empleados para obtenerla.*

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

1. Encuentra la expresión de $\frac{dy}{dx}$ si la relación entre y y x está dada por la ecuación $x^3 = y^4 + x^2 \sin(y) + 1$.

2. Encuentra el polinomio de Taylor de orden 6 de la función $f(x) = \frac{1}{1+2x}$ en un entorno del punto $x_0 = 0$.

3. Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $a(n) = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} e^x dx$. Si la sucesión converge, halla su límite. (Puedes utilizar un grafo para visualizar la convergencia o la divergencia de la sucesión).

4. Calcula las soluciones de la ecuación $z^4 + 3z^2 - 4 = 0$.

5. Estudia la convergencia de integral impropia $\int_0^\pi f(x)dx$ donde $f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+\cos(x)}}$.

6. Sean $f(x) = |x^2 - 2|$ y $g(x) = \arcsin(\frac{1}{x})$. Estudia el límite de la función $g \circ f$ en el punto $x_0 = 0$.



Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas y Gestión) *Examen M*

Fecha: Febrero de 2000 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

*El examen está formado por seis problemas cada uno de ellos valorado sobre **dos puntos**. En la respuesta a cada ejercicio hay que incluir los comandos de Maple empleados para obtenerla.*

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

1. Calcular el argumento del número complejo $\sqrt{5} + i\sqrt{5}$.
2. Calcular el polinomio de Taylor de orden 4 de la función $f(x) = e^{-5x^2}$ en un entorno de $x = 0$.
3. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = e^{5x-3} + 1$ y $g(x) = x^2 - 10$. Calcular el área de la región limitada por $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = 2$ y $x = 3$.
4. Calcular el valor de la función derivada tercera de la función $\frac{1}{\sqrt{5x^2+1}}$ en el punto $x = 2$.
5. Para todo $n \in \mathbb{N}$ sea $a(n) = (3^{n^2} - 2^n)^{\frac{1}{n}}$. Determina si la sucesión $\{a_n\}_n$ es convergente o no y calcula en su caso el valor de su límite. (Puedes utilizar un grafo para visualizar la convergencia o divergencia de la sucesión).

6. Sean $f(x) = \sqrt{2x^2 + 7} + 3x^2$ y $g(x) = 4e^{x^2+2x}$. Estudia el límite de la función $g \circ f$ en el punto $x_0 = 1$.



Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas y Gestión) *Examen N*

Fecha: Febrero de 2000 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

*El examen está formado por seis problemas cada uno de ellos valorado sobre **dos puntos**. En la respuesta a cada ejercicio hay que incluir los comandos de Maple empleados para obtenerla.*

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

1. Determina si la sucesión $\{e^{\sqrt[n]{\frac{2n}{n+1}}}\}_n$ es convergente o no y calcula en su caso el valor de su límite.

2. Sean $f(x) = \sqrt{(3x+2)^2}$ y $g(x) = x^3 - 5$. Estudia el límite de la función $f \circ g$ en el punto $x_0 = 0$.

3. Halla la tercera derivada de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{(x+1)^2}$ y calcula el valor de dicha derivada en el punto $x = 0$.

4. Sean $f(x), g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = x^2 + 12$ y $g(x) = -x$. Calcula el área de la región limitada por $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = 0$, y $x = 1$.

5. Encuentra el polinomio de Taylor de orden 4 de la función $f(x) = e^{x^3 - 2x^2 + 1}$ en un entorno del punto $x_0 = 0$.

6. Halla las raíces complejas de la ecuación $5|z|^2 = 3|z| + 1$.

Capítulo 6

Exámenes (2000-2001)



Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas y Gestión) Examen A

Fecha: 8 Febrero de 2001 Tiempo: 50 m.

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por cinco problemas todos del mismo valor.

En la respuesta a cada ejercicio hay que incluir, junto a la solución, los comandos de Maple empleados para obtenerla.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

1. Calcula los puntos críticos de la función $f : [-2, 2.5] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = |x^3 - 3x^2 + 2|$.

Solución:

2. Estudia la continuidad de la función definida a trozos como $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ si $x \leq 0$ y $f(x) = x \operatorname{sen}(3/x) + (1 + \frac{2}{x})^{3x}$ si $x > 0$.

Solución:

3. Encuentra la parte imaginaria del siguiente número complejo:

$$\frac{\sqrt{3+2i}}{1-3i}.$$

Solución:

4. Calcula el área que encierran las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 7$ y $g(x) = x^2 - 7$ entre sus dos puntos de corte.

Solución:

5. Sea la función $h(x) = \ln\left(\frac{3x^2+1}{x^4+2}\right)$. Calcula el valor de la derivada undécima en el punto $x = 3.5$.

Solución



Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas y Gestión) *Examen B*

Fecha: 8 Febrero de 2001 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por cinco problemas todos del mismo valor.

En la respuesta a cada ejercicio hay que incluir, junto a la solución, los comandos de Maple empleados para obtenerla.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n$. Si la sucesión converge, halla su límite.

(Puedes utilizar una gráfica para visualizar la convergencia o la divergencia de la sucesión.)

Solución:

2. Halla la forma polar de $z = \frac{1 - 7I}{2 + 6I}$.

Solución:

3. Sea la función $f(x) = \arctg(3x^3 - 1)$. Calcula el valor de la derivada séptima en el punto $x = 1$.

Solución:

4. Sean $f(x) = x^2 - 2x + 4$ y $g(x) = x^2 + 2$.

Calcula el volumen del solido de revolución obtenido rotando alrededor del eje de las x la región limitada por $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = 0$ y $x = 1$.

Solución:

5. Sea $f(x) = x^4 - 2x + 7$.

Halla el valor en $x = 2$ del polinomio de Taylor de orden 4 de f en un entorno de $x_0 = 1$.

Solución



Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas y Gestión) *Examen C*

Fecha: 8 Febrero de 2001 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por cinco problemas todos del mismo valor.

En la respuesta a cada ejercicio hay que incluir, junto a la solución, los comandos de Maple empleados para obtenerla.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por $a_n = \int_0^{\frac{n}{n+1}} \cos(3x - \pi) dx$.

Si la sucesión converge, halla su límite.

(Puedes utilizar una gráfica para visualizar la convergencia o la divergencia de la sucesión.)

Solución:

2. Halla la parte imaginaria de $z = \frac{1}{(1 - 6I)^3}$.

Solución:

3. Sea la función $f(x) = \begin{cases} 3x^3 - 5x & \text{si } x \geq 1 \\ x^4 - 3 & \text{si } x < 1 \end{cases}$. Calcula el valor de la derivada de f , si existe, en el punto $x = 1$.

Solución:

4. Sea $f(x) = (2x - 1)^2$ en $[0,3]$.

Calcula el volumen del solido de revolución obtenido rotando alrededor del eje de las y la región limitada por $y = f(x)$, $x = 0$ y $x = 3$.

Solución:

5. Halla la derivada de la función $y(x)$ definida implícitamente por la ecuación

$$x^2 y(x)^2 = (y(x) - 3)^2 (1 - y(x)).$$

Solución



Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas y Gestión) *Examen D*

Fecha: 8 Febrero de 2001 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por cinco problemas todos del mismo valor.

En la respuesta a cada ejercicio hay que incluir, junto a la solución, los comandos de Maple empleados para obtenerla.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

1. Dada la función $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = (-x^2 + 4x)\ln(x)$. Determina los máximos y mínimos absolutos de la función. (Observación: el comando `fsolve` resuelve ecuaciones que no resuelve `solve`.)

Solución:

2. Calcula la integral entre -2 y 2 de la función definida a trozos como $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$ si $x \leq 0$ y $f(x) = (\frac{7}{5})^{3x}$ si $x > 0$.

Solución:

3. Expresa en forma trigonométrica el siguiente número complejo:

$$\frac{(3 + 2i)^2}{1 - 3i}$$

Solución:

4. Sea la función $f(x) = x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 7$. Estudiar los intervalos de convexidad y concavidad de f .

Solución:

5. Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión cuyo término general es $a_n = \left(\frac{n+3}{n}\right)^{2n}$. Determina su límite y encuentra el error que se comete al aproximar el límite por el término 2000 de esta sucesión. (Indicación: usa el valor aproximado que tiene Maple para el valor del límite de la sucesión.)

Solución



Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas y Gestión) *Examen E*

Fecha: 8 Febrero de 2001 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por cinco problemas todos del mismo valor.

*En la respuesta a cada ejercicio hay que incluir, **junto a la solución**, los comandos de Maple empleados para obtenerla.*

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

1. Estudia la continuidad de la función definida a trozos como $f(x) = 2x^2 + 3x + 2$ si $x \leq 0$ y $f(x) = x\cos(3/x) + (1 + \frac{5}{x})^{4x}$ si $x > 0$.

Solución:

2. Calcula los puntos críticos de la función $f : [-2, 2.5] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = |3x^3 - x^2 + 2|$.

Solución:

3. Encuentra la parte real del siguiente número complejo:

$$\frac{\sqrt{5 - 2i}}{1 + 3i}$$

Solución:

4. Sea la función $h(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{3x^2+1}{x^4+2}\right)$. Calcula el valor de la derivada décima en el punto $x = 3.5$.

Solución:

5. Calcula el área que encierran las gráficas de las funciones $f(x) = -3x^2 + 9$ y $g(x) = 3x^2 - 9$ entre sus dos puntos de corte.

Solución



Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas y Gestión) *Examen F*

Fecha: 8 Febrero de 2001 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por cinco problemas todos del mismo valor.

En la respuesta a cada ejercicio hay que incluir, junto a la solución, los comandos de Maple empleados para obtenerla.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

1. Halla la forma polar de $z = \frac{1 + 7I}{(2 + 6I)^2}$.

Solución:

2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por $a_n = (-1)^{n+1} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n}$. Si la sucesión converge, halla su límite.

(Puedes utilizar una gráfica para visualizar la convergencia o la divergencia de la sucesión.)

Solución:

3. Sea la función $f(x) = \cos(3x^3 - e^x)$. Calcula el valor de la derivada de orden 15 en el punto $x = 2$.

Solución:

4. Sea $f(x) = x^4 - 3x + 5$.

Halla el valor en $x = 3$ del polinomio de Taylor de orden 4 de f en un entorno de $x_0 = 2$.

Solución:

5. Sean $f(x) = (x - 1)^2 - 2(x - 1) + 4$ y $g(x) = (x - 1)^2 + 2$.

Calcula el volumen del solido de revolución obtenido rotando alrededor del eje de las x la región limitada por $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = 0$ y $x = 1$.

Solución



Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas y Gestión) *Examen G*

Fecha: 8 Febrero de 2001 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por cinco problemas todos del mismo valor.

*En la respuesta a cada ejercicio hay que incluir, **junto a la solución**, los comandos de Maple empleados para obtenerla.*

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por $a_n = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{n+1}{n}} \operatorname{sen}(\pi + 2x) dx$.

Si la sucesión converge, halla su límite.

(Puedes utilizar una gráfica para visualizar la convergencia o la divergencia de la sucesión.)

Solución:

2. Halla el argumento de $z = \frac{1}{(1 - 6I)^3}$.

Solución:

3. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^3 + x & \text{si } x \geq 2 \\ 13x - 16 & \text{si } x < 2 \end{cases}$. Calcula el valor de la derivada de f , si existe, en el punto $x = 2$.

Solución:

4. Sea $f(x) = (4x - 5)^2$.

Calcula el volumen del sólido de revolución obtenido rotando alrededor del eje de las y la región limitada por $y = f(x)$, $x = 1$ y $x = 4$.

Solución:

5. Halla la derivada de la función $y(x)$ definida implícitamente por la ecuación

$$x^3 + y(x)^2 = (2y(x) - 1)y(x)^4.$$

Solución



Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas y Gestión) *Examen H*

Fecha: 8 Febrero de 2001 **Tiempo: 50 m.**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por cinco problemas todos del mismo valor.

*En la respuesta a cada ejercicio hay que incluir, **junto a la solución**, los comandos de Maple empleados para obtenerla.*

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

1. Calcula la integral entre -2 y 2 de la función definida a trozos como $f(x) = x^2 + 3x + 5$ si $x \leq 0$ y $f(x) = \left(\frac{7}{5}\right)^{3x}$ si $x > 0$.

Solución:

2. Dada la función $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = (x^2 - 4x)\ln(x)$. Determina los máximos y mínimos absolutos de la función. (Observación: el comando fsolve resuelve ecuaciones que no resuelve solve.)

Solución:

3. Expresa en forma trigonométrica el siguiente número complejo:

$$\frac{(3 - 2i)}{(1 - 3i)^2}$$

Solución:

4. Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión cuyo término general es $a_n = \left(\frac{n+5}{n}\right)^{4n}$. Determina su límite y encuentra el error que se comete al aproximar el límite por el término 1000 de esta sucesión. (Indicación: usa el valor aproximado que tiene Maple para el valor del límite de la sucesión.)

Solución:

5. Sea la función $f(x) = x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 7$. Estudia los intervalos de convexidad y concavidad de f .

Solución

Capítulo 7

Exámenes (2001-2002)



Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas y Gestión) *Examen A*

Fecha: 8 de Febrero del 2002 **Tiempo: 50 minutos**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por cinco problemas todos del mismo valor.

En la respuesta a cada ejercicio hay que incluir, junto a la solución, los comandos de Maple empleados para obtenerla.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

1. Si $a, b > 0$, halla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n$$

Solución:

2. Calcula los puntos críticos de la función $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = |4x^4 - 3x^2 + x + 1|$.

Solución:

3. Estudia la continuidad en $x = 0$ de la función $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Solución:

4. Calcula el volumen generado al girar la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

alrededor del eje de las ordenadas.

Solución:

5. Sea $f(x) = \ln(e^x \cos(x))$. Calcula el coeficiente de x^7 en el polinomio de Taylor de $f(x)$ en un entorno de $a = 0$.

Solución:



Bases de Matemáticas

(Informática de Sistemas y Gestión) *Examen B*

Fecha: 8 de Febrero del 2002 **Tiempo: 50 minutos**

APELLIDOS (UTILIZAR MAYUSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

El examen está formado por cinco problemas todos del mismo valor.

En la respuesta a cada ejercicio hay que incluir, junto a la solución, los comandos de Maple empleados para obtenerla.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

1. Calcula los puntos máximos y mínimos locales, así como los puntos de inflexión de la función

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$$

Solución:

2. Halla la derivada de orden 10 de la función definida como:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+x}{n} \right)^{-2n}.$$

Solución:

3. Determina los dos primeros términos no nulos del polinomio de Taylor en $x = 0$ de la función:

$$f(x) = \tan(\operatorname{sen}(x)) - \operatorname{sen}(\tan(x))$$

Solución:

4. Halla el área de la región

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} : x, y \geq 0, y \leq x^2, y \leq \frac{1}{x^2} \right\}$$

Solución:

5. Dí cuántas soluciones tiene la ecuación

$$x^x = 2 \quad \text{en} \quad [1, \infty).$$

Solución:

Parte III

Soluciones de los problemas

Capítulo 8

Soluciones de las cuestiones sobre números complejos

8.1 Soluciones de las cuestiones sobre números complejos (1999-2000):

1. La parte imaginaria de $\sqrt{2-2I}$ es :

- a) $\sqrt{\sqrt{2}-1}$
- b) $\sqrt{\sqrt{2}+1}$
- c) $-\sqrt{\sqrt{2}-1}$

```
> restart; Im(sqrt(2-2*I));  
-sqrt(sqrt(2)-1)
```

La respuesta verdadera es la c).

2. El argumento de $\sqrt{3}-1+I(\sqrt{3}+1)$ es:

- a) $\arctan\left(\frac{-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}\right)$
- b) $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$
- c) $\frac{1\pi}{4}$

```
> restart; argument(sqrt(3)-1+I*(sqrt(3)+1));
```

$$\arctan\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$$

La respuesta verdadera es la b).

3. Las soluciones de la ecuación $|z|^4 = |z|^2 + 2$ son:

a) no existen soluciones

b) $1 - 1$

c) $-\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$

> `restart;solve(abs(z)^4 = abs(z)^2+2);`

$$-\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$$

La respuesta verdadera es la c).

4. Las soluciones de la ecuación $z^3 \bar{z} + 3z^2 - 4 = 0$ son:

a) no existen soluciones

b) $z = 1$ y $z = -1$ son soluciones

c) $z = -2$ es solución

> `restart;solve(evalc(z^3*conjugate(z)+3*z^2-4 = 0));`

$$1, -1, 2I, -2I$$

La respuesta verdadera es la b).

5. Las soluciones de la ecuación $z^3 = 1$ son:

a) $0, -\frac{3}{2} + \frac{1I\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2} - \frac{1I\sqrt{3}}{2}$

b) $1, -\frac{1}{2} + \frac{1I\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{1I\sqrt{3}}{2}$

c) $2, \frac{1}{2} + \frac{1I\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1I\sqrt{3}}{2}$

> `restart;solve(z^3 = 1);`

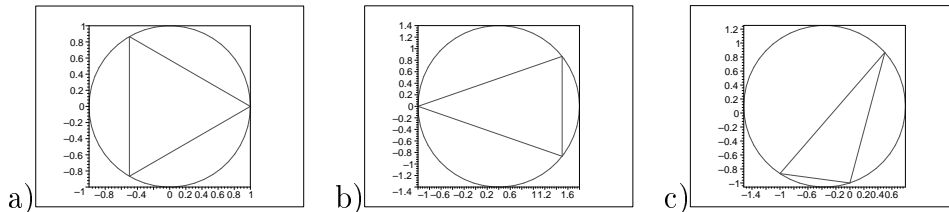
$$1, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{3}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{3}$$

> `2, 1/2+1/2*I*sqrt(3), 1/2-1/2*I*sqrt(3);`

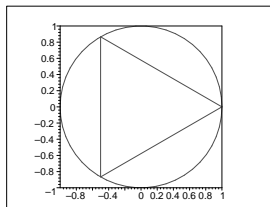
$$2, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{3}$$

La respuesta verdadera es la b).

6. La representación gráfica de las soluciones de la ecuación $z^3 = 1$ como vértices de un triángulo es:



```
> restart;with(geometry):triangle(T,[point(A2,1,0),point(A1,-1/2,sqrt(3)
> )/2),point(A3,-1/2,-sqrt(3)/2)]):draw([circumcircle(C,T,'centername'=0
> 0),T]);
```



La respuesta verdadera es la a).

7. La forma polar de $\frac{(I-1)^5}{(I+1)^4}$ es:

a) $\text{polar}(\sqrt{2}, \frac{1\pi}{4})$

b) $\text{polar}(\frac{1\sqrt{2}}{2}, -\frac{1\pi}{4})$

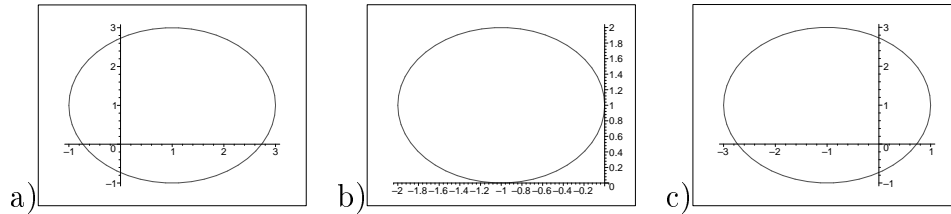
c) $\text{polar}(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$

```
> restart;z:=(I-1)^5/((I+1)^4); convert(z,polar);
```

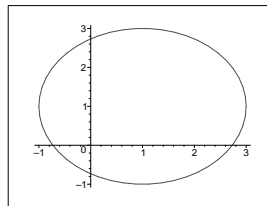
```
z := -1 + I
polar(sqrt(2), 3/4 pi)
```

La respuesta verdadera es la c).

8. La representación gráfica en el plano real del entorno de radio 2 del punto $1 + I$ es:



```
> with(plottools): c := circle([1,1], 2,
> color=red);
> plots[display](c);
```



La respuesta verdadera es la a).

9. La expresión $\text{polar}(r,t)^2 * \text{polar}(s,u)$ es igual a:

- a) $\text{polar}(r^2 s, t + u)$
- b) $\text{polar}(r^2 s, 2t + u)$
- c) $\text{polar}(r s, 2t + u)$

```
> restart; simplify(polar(r,t)^2 * polar(s,u)) ;
polar(r^2 s, 2t + u)
```

La respuesta verdadera es la b).

10. La forma $a + bI$ del número complejo \sqrt{i} es:

- a) $\frac{1\sqrt{2}}{2} + \frac{1I\sqrt{2}}{2}$
- b) $\frac{1\sqrt{2}}{2} - \frac{1I\sqrt{2}}{2}$
- c) $1 + I$

```
> restart; simplify(sqrt(I));
```

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{2}$$

La respuesta verdadera es la a).

8.2 Soluciones de las cuestiones sobre números complejos (2000-2001):

1. La parte imaginaria de $\sqrt{5I - \frac{12+\sqrt{-5}}{13I-6}}$ es :

$$\text{a) } \frac{1 \sqrt{84050 \sqrt{\left(\frac{1097}{205} - \frac{13\sqrt{5}}{205}\right)^2 + \left(\frac{6\sqrt{5}}{205} + \frac{156}{205}\right)^2} - 449770 + 5330\sqrt{5}}{410}$$

$$\text{b) } \frac{1 \sqrt{2 \sqrt{7056 + (245 - 7\sqrt{5})^2} + 168}}{14}$$

$$\text{c) } \frac{1 \sqrt{84050 \sqrt{\left(\frac{72}{205} - \frac{13\sqrt{5}}{205}\right)^2 + \left(\frac{1181}{205} + \frac{6\sqrt{5}}{205}\right)^2} - 29520 + 5330\sqrt{5}}{410}$$

> restart; Im(evalc(sqrt(5*I-(12+sqrt(-5))/(13*I-6))));

$$\frac{1}{410} \sqrt{84050 \sqrt{\left(\frac{72}{205} - \frac{13\sqrt{5}}{205}\right)^2 + \left(\frac{1181}{205} + \frac{6\sqrt{5}}{205}\right)^2} - 29520 + 5330\sqrt{5}}$$

La respuesta verdadera es la c).

2. El argumento de $\sqrt{5I - \frac{12+\sqrt{-5}}{13I-6}}$ es:

$$\text{a) } \arctan\left(\frac{\sqrt{\sqrt{245746-1740\sqrt{5}+24+5\sqrt{5}}}}{\sqrt{\sqrt{245746-1740\sqrt{5}-24-5\sqrt{5}}}}\right)$$

$$\text{b) } \arctan\left(\frac{\sqrt{\sqrt{1400970+12300\sqrt{5}-72+13\sqrt{5}}}}{\sqrt{\sqrt{1400970+12300\sqrt{5}+72-13\sqrt{5}}}}\right)$$

$$\text{c) } \arctan\left(\frac{\sqrt{\sqrt{1400970+12300\sqrt{5}+72-13\sqrt{5}}}}{\sqrt{\sqrt{1400970+12300\sqrt{5}-72+13\sqrt{5}}}}\right)$$

> restart; simplify(argument(evalc(sqrt(5*I-(12+sqrt(-5))/(13*I-6))));

$$\arctan\left(\frac{\sqrt{\sqrt{1400970+12300\sqrt{5}-72+13\sqrt{5}}}}{\sqrt{\sqrt{1400970+12300\sqrt{5}+72-13\sqrt{5}}}}\right)$$

La respuesta verdadera es la b) .

3. Los números I^5 , I^{13} , I^{249} y de I^{34513} son:

- a) Iguales a $-I$ o a 1
- b) Iguales a 1 o a -1
- c) Todos iguales a I

```
> restart; I^5, I^13, I^249, I^34513;
      I, I, I, I
```

La respuesta verdadera es la c).

4. Se considere la ecuación $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$, entonces:

- a) no existen soluciones
- b) $z = 1$ y $z = 2$ son soluciones
- c) $z = -2$ es solución

```
> restart; solve(evalc(z^6-9*z^3+8 = 0));
      1, 2, -1 + I*sqrt(3), -1 - I*sqrt(3), -1/2 + 1/2*I*sqrt(3), -1/2 - 1/2*I*sqrt(3)
```

La respuesta verdadera es la b).

5. Las soluciones de la ecuación $z^5 = 1$ son:

a) $-1, -\frac{1\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1I\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4},$
 $\frac{1\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1I\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}, \frac{1\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1I\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}, -\frac{1\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1I\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}$

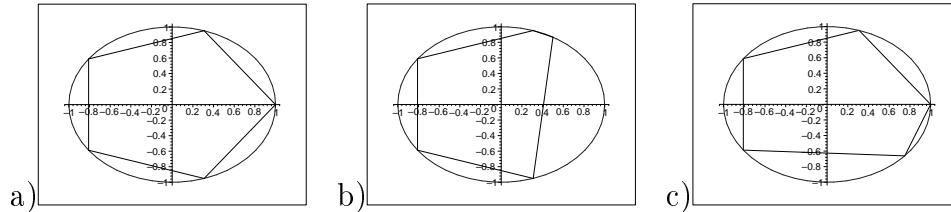
b) $1, \frac{1\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1I\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}, -\frac{1\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1I\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4},$
 $-\frac{1\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1I\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}, \frac{1\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1I\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}$

c) $-I(\frac{1\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1I\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}), -I(-\frac{1\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1I\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}),$
 $-I(-\frac{1\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1I\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}), -I(\frac{1\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1I\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}), -I$

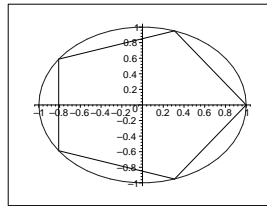
```
> restart; solve(z^5 = 1);
      1, 1/4 + 1/4*I*sqrt(5) + 1/4*I*sqrt(5+sqrt(5)), -1/4 + 1/4*I*sqrt(5) - 1/4*I*sqrt(5+sqrt(5)),
      -1/4 + 1/4*I*sqrt(5) - 1/4*I*sqrt(5-sqrt(5)), 1/4 + 1/4*I*sqrt(5) + 1/4*I*sqrt(5+sqrt(5))
```

La respuesta verdadera es la b).

6. La representación gráfica de las soluciones de la ecuación $z^5 = 1$ como vértices de un polígono es:



```
> restart;with(plottools):p:=polygon([[1,0],[1/4*sqrt(5)-1/4,1/4*sqrt(2)
> )*sqrt(5+sqrt(5))],[-1/4*sqrt(5)-1/4,1/4*sqrt(2)*sqrt(5-sqrt(5))],[-1/
> 4*sqrt(5)-1/4,-1/4*sqrt(2)*sqrt(5-sqrt(5))],[1/4*sqrt(5)-1/4,-1/4*sqrt
> (2)*sqrt(5+sqrt(5))]):c:=circle([0,0],1,color=blue):plots[display]({
> {p,c}});
```



La única representación gráfica posible es la opción a), ya que los polígonos en b) y c) no dividen la circunferencia unitaria en 5 partes iguales. La respuesta verdadera es la a).

7. La forma polar de $\ln(3 + 3I)$ es:

a) polar($\frac{1\sqrt{4\ln(18)^2+\pi^2}}{4}$, $-\arctan(\frac{1\pi}{2\ln(18)})$)

b) polar($\left(\frac{1\sqrt{\ln(13)^2+4\arctan(\frac{3}{2})^2}}{2}, \arctan\left(\frac{2\arctan(\frac{3}{2})}{\ln(13)}\right)\right)$)

c) polar($\frac{1\sqrt{4\ln(18)^2+\pi^2}}{4}$, $\arctan(\frac{1\pi}{2\ln(18)})$)

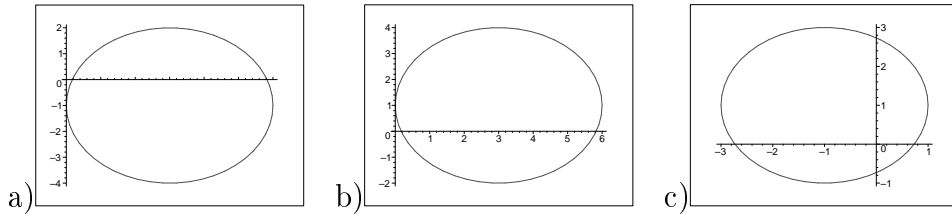
```
> restart;readlib(polar):z:=evalc(ln(3+3*I)); convert(z,polar);
```

$$z := \frac{1}{2} \ln(18) + \frac{1}{4} I \pi$$

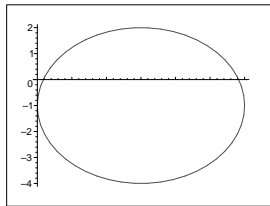
$$\text{polar}\left(\frac{1}{4} \sqrt{4 \ln(18)^2 + \pi^2}, \arctan\left(\frac{1}{2} \frac{\pi}{\ln(18)}\right)\right)$$

La respuesta verdadera es la c).

8. La representación gráfica en el plano real del entorno de radio 3 del punto $3 - I$ es:



```
> with(plottools): c := circle([3,-1], 3,
> color=red):
> plots[display](c);
```



La respuesta verdadera es la a).

9. Sea x un número real. Las expresiones $a = \frac{e^{Ix} + e^{-Ix}}{2}$ y $b = \frac{e^{Ix} - e^{-Ix}}{2I}$ son tales que:

- a) $a = \cos(x)$ y $b = \sin(2x)$
- b) $a = \cos(x)$ y $b = \sin(x)$
- c) $a = \sin(x)$ y $b = \cos(x)$

```
> evalc((exp(I*x)+exp(-I*x))/2);
      cos(x)
> simplify(exp(I*x)-exp(-I*x))/(2*I);
      sin(x)
```

La respuesta verdadera es la b).

10. Sabiendo que la condición que tienen que cumplir tres números complejos \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} , con \mathbf{u} distinto de \mathbf{w} , para estar alineados, es que el cociente $\frac{u-v}{u-w}$ sea un número real, encontrar el lugar geométrico de los complejos $\mathbf{z}=\mathbf{a}+I\mathbf{b}$ tales que $\mathbf{1}$, \mathbf{z} y \mathbf{z}^2 estén alineados.

a) $\{b = 0, a = a\}$, $\{a = a, b = \sqrt{-a^2 + 2a}\}$, $\{a = a, b = -\sqrt{-a^2 + 2a}\}$

b) $\{b = 0, a = a\}$, $\{b = \sqrt{-a^2 - 2a}, a = a\}$, $\{b = -\sqrt{-a^2 - 2a}, a = a\}$

c) $\{b = 0, a = a\}$, $\{a = a, b = \sqrt{-a^2 - a}\}$, $\{a = a, b = -\sqrt{-a^2 - a}\}$

> restart;z:=a+I*b;

$$z := a + I b$$

> evalc((1-z)/(1-(1+z^2)));

$$\frac{(-1+a)(a^2-b^2)}{\%1} + 2\frac{b^2a}{\%1} + I\left(\frac{b(a^2-b^2)}{\%1} - 2\frac{(-1+a)ab}{\%1}\right)$$

$$\%1 := (a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2$$

> solve(evalc(Im((1-z)/(1-(1+z^2))))),{a,b});

$$\{b = 0, a = a\}, \{b = \sqrt{-a^2 + 2a}, a = a\}, \{b = -\sqrt{-a^2 + 2a}, a = a\}$$

La respuesta verdadera es la a).

Capítulo 9

Soluciones de las cuestiones sobre límites de sucesiones y de funciones

9.1 Soluciones de las cuestiones sobre límites de sucesiones y de funciones (1999-2000):

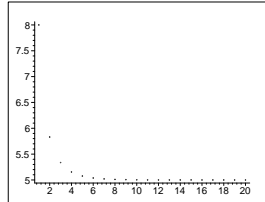
1. Sea $a(n) = (5^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$. Utilizando un grafo para establecer la convergencia o divergencia de la sucesión $\{a(n)\}$, se verifica que :

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n)$ no existe
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n) = 5$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n) = 3$

```
> restart;a:=n->(5^n+3^n)^(1/n):  
> seq(a(n),n=1..20):  
> evalf(%);
```

```
8., 5.830951895, 5.336803297, 5.154673657, 5.075448397, 5.038145035, 5.019759614,  
5.010421260, 5.005573801, 5.003015114, 5.001646364, 5.000906089,  
5.000502032, 5.000279770, 5.000156694, 5.000088148, 5.000049780,  
5.000028210, 5.000016035, 5.000009140  
> n:='n':
```

```
> plot([seq([n,a(n)],n=1..20)],style=point);
```



```
> Limit(a(n),n=infinity)=limit(a(n),n=infinity);
```

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (5^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} = 5$$

La respuesta verdadera es la b) .

2. Sea $a(n) = \arctan(2n/(2n+1))$. Utilizando un grafo para establecer la convergencia o divergencia de la sucesión $\{a(n)\}$, se verifica que :

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n)$ no existe

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n) = 1$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n) = \frac{\pi}{4}$

```
> restart;a:=n->arctan(2*n/(2*n+1));
```

```
> seq(a(n),n=1..20):
```

```
> evalf(%);
```

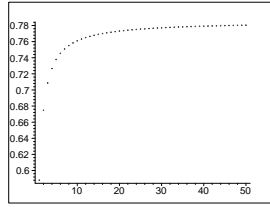
```
.5880026036, .6747409422, .7086262721, .7266423407, .7378150601, .7454194763,  
.7509290624, .7551044035, .7583777142, .7610127542, .7631795981,  
.7649928327, .7665324774, .7678561034, .7690061891, .7700147616,  
.7709064243, .7717003900, .7724118805, .7730531116
```

```
> n:='n':
```

```
> plot([seq([n,a(n)],n=1..50)],style=point);
```

```
> Limit(a(n),n=infinity)=limit(a(n),n=infinity);
```

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan\left(2 \frac{n}{2n+1}\right) = \frac{1}{4} \pi$$



La respuesta verdadera es la c) .

3. Sea $a(n) = (\sin(3/n)) / (1/n)$. Utilizando un grafo para establecer la convergencia o divergencia de la sucesión $\{a(n)\}$, se verifica que :

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n) = 3$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n)$ no existe

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n) = \infty$

```
> restart;a:=n->(sin(3/n)) / (1/n):
```

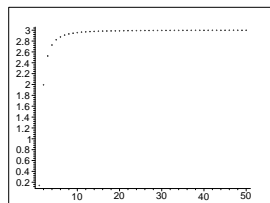
```
> seq(a(n),n=1..20):
```

```
> evalf(%);
```

```
.1411200081, 1.994989973, 2.524412954, 2.726555040, 2.823212367, 2.876553232,  
2.909002985, 2.930180233, 2.944752271, 2.955202067, 2.962947983,  
2.968847512, 2.973443593, 2.977093472, 2.980039962, 2.982452749,  
2.984453292, 2.986130389, 2.987550154, 2.988762650
```

```
> n:='n':
```

```
> plot([seq([n,a(n)],n=1..50)],style=point);
```



> Limit(a(n),n=infinity)=limit(a(n),n=infinity);

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(3 \frac{1}{n}\right) n = 3$$

La respuesta verdadera es la a).

4. El polinomio $x^3 - 7x + 2 = 0$ contiene una raíz r en el intervalo $(0,1)$. Si se aproxima r por medio de la sucesión

$x(1) = \frac{1}{2}$, $x(n+1) = \frac{1x(n)^3}{7} + \frac{2}{7}$ (para todo $n \geq 1$) (ver ejemplo 4 de la teoría de esta Práctica), decidir si el valor de $|r - x(6)|$ es menor que

a) .0003373594336

b) .0002530195752

c) .005060391504

Cómo en el ejemplo 4, $|x(n) - r| \leq \frac{3^{(n-1)}}{7^{(n-2)} 20}$ y, para $n=6$, se obtiene que $|r - x(6)|$ es menor que el valor

> restart; evalf(3^(6-1)/(7^(6-2)*20));

.005060391504

La respuesta verdadera es la c).

5. Sean $f(x) = 1/x$ y $g(x) = 2x^2 - x - 2$. Estudiar el límite de "g o f" (la función compuesta de g con f) en el punto $x=0$. Se verifica que :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = \infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(f(x))$ y $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(f(x))$ son distintos

c) $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = -\frac{1}{2}$

> restart;

> f:=x->1/x;g:=x->2*x^2 -x-2;

$$f := x \rightarrow \frac{1}{x}$$

$$g := x \rightarrow 2x^2 - x - 2$$

> Limit((g@f)(x),x=0)=limit((g@f)(x),x=0);

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 2 = \infty$$

La respuesta verdadera es la a).

6. Utilizando un grafo, encuentra un número δ tal que $\left| \frac{x+1}{x-1} - 3 \right| < \frac{1}{5}$ si $|x - 2| < \delta$.

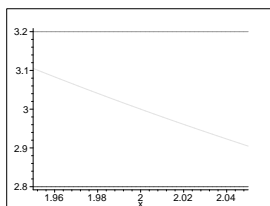
a) $\delta = .05$ b) $\delta = .5$ c) $\delta = .1$

> restart;

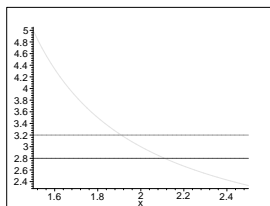
> f:=x-(x+1)/(x-1);

$$f := x \rightarrow \frac{x+1}{x-1}$$

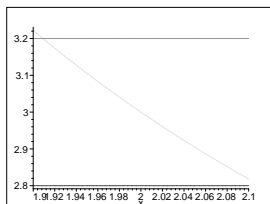
> plot({f(x), 2.8, 3.2}, x=1.95..2.05);



> plot({f(x), 2.8, 3.2}, x=1.5..2.5);



> plot({f(x), 2.8, 3.2}, x=1.9..2.1);



La respuesta verdadera es la a).

7. Para todo x diferente de 0 en $(-1,1)$, sea $f(x) := \frac{1}{x^n}$. Utilizando un grafo para $n=2,3,4$ y 5 , deduce si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n}$

- a) es igual a ∞ para todo n
- b) no existe si n es impar y es igual a ∞ si n es par
- c) no existe si n es par y es igual a ∞ si n es impar

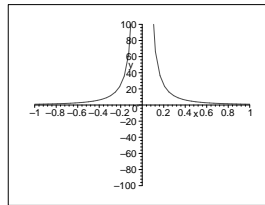
> restart;f:=x->1/(x^n);

$$f := x \rightarrow \frac{1}{x^n}$$

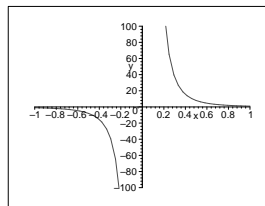
> for i from 2 to 5

> do n:=i; plot(f(x),x=-1..1, y= -100..100); od;

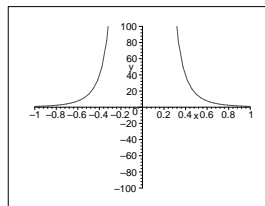
n := 2



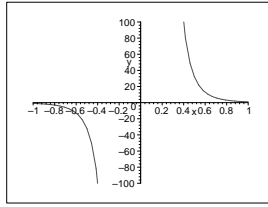
n := 3



n := 4



n := 5



La respuesta verdadera es la b).

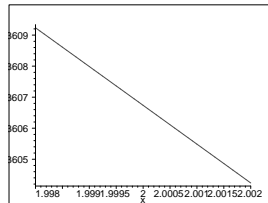
8. Sea $f(x) := \frac{\sin(x-2)}{2^x-4}$. Mirando al grafo de f sobre un intervalo que contenga 2, el límite de f en el punto 2 parece ser (con una aproximación de 10 dígitos) igual a

- a) .3609568912
- b) .3606737603
- c) .3601337601

```
> restart; f := x -> sin(x-2)/(2^x-4);
```

$$f := x \rightarrow \frac{\sin(x-2)}{2^x-4}$$

```
> plot(f(x), x=1.998 .. 2.002);
```



```
> Limit(f(x), x=2)=evalf(limit(f(x), x=2));
```

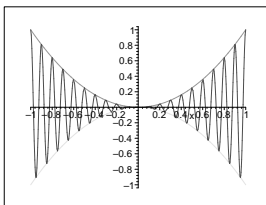
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{2^x-4} = .3606737603$$

La respuesta verdadera es la b).

9. Utilizar el teorema de compresión y los grafos de las funciones $f(x) := -x^2$, $g(x) := x^2 \cos(20\pi x)$ y $h(x) := x^2$ para demostrar que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ es igual a

- a) -1
- b) 0
- c) 1

```
> restart;f:=x->-x^2; g:=x->x^2*cos(20*Pi*x);h:=x->x^2;
      f := x → -x2
      g := x → x2 cos(20 π x)
      h := x → x2
> plot({f(x),g(x),h(x)},x=-1..1);
```



La respuesta verdadera es la b).

10. Sea $f(x)$ la función que a cada número real x le asocia el mayor número entero menor o igual a x . Su definición en Maple V es la siguiente : $f := x \rightarrow \text{floor}(x)$.

Los límites de $f(x)$ por la derecha y por la izquierda en el punto 3 son:

- a) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \text{floor}(x)$ no existe y $\lim_{x \rightarrow 3^-} \text{floor}(x) = 2$
- b) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \text{floor}(x) = 3$ y $\lim_{x \rightarrow 3^-} \text{floor}(x)$ no existe
- c) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \text{floor}(x) = 3$ y $\lim_{x \rightarrow 3^-} \text{floor}(x) = 2$

```
> restart;f:=x->floor(x);
      f := floor
> Limit(f(x),x=3,right)=limit(f(x),x=3,right);
> Limit(f(x),x=3,left)=limit(f(x),x=3,left);
      lim floor(x) = 3
      x→3+
      lim floor(x) = 2
      x→3-
```

La respuesta verdadera es la c).

9.2 Soluciones de las cuestiones sobre límites de sucesiones y de funciones (2000-2001):

1. Sea $a_n = \frac{((2n)!)^{(\frac{1}{n})}}{n}$ el término de orden n de la sucesión $\{a_n\}$.

Se verifica que:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ no existe

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{4}{e}$

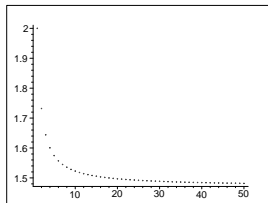
c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4e$

```
> restart;a:=n->((2*n)!/n!)^(1/n)/n;
> seq(a(n),n=1..20);
> evalf(%);
```

$$a := n \rightarrow \frac{((2n)!)^{(\frac{1}{n})}}{n}$$

2., 1.732050808, 1.644141383, 1.600542937, 1.574513371, 1.557218284, 1.544894372,
1.535668220, 1.528502509, 1.522776473, 1.518095918, 1.514198504,
1.510902878, 1.508079664, 1.505634087, 1.503495134, 1.501608545,
1.499932147, 1.498432670, 1.497083511

```
> n:='n':
> plot([seq([n,a(n)],n=1..50)],style=point);
```



```
> Limit(a(n),n=infinity)=limit(a(n),n=infinity);
```

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}}{n} = 4e^{(-1)}$$

La respuesta verdadera es la b) .

2. Sea r un número real y sea $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\left(\frac{r n^2+1}{2n}\right)}$ el término de orden n de la sucesión $\{a_n\}$. Calcula r para que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = (e)^2$.

a) $r = 2$

b) no existe ningún tal r .

c) $r = 4$

> `restart;a:=n->((n+1)/n)^((r*n^2+1)/(2*n));`

$$a := n \rightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\left(\frac{1}{2} \frac{r n^2+1}{n}\right)}$$

> `Limit(a(n),n=infinity)=limit(a(n),n=infinity);`

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\left(\frac{1}{2} \frac{r n^2+1}{n}\right)} = \sqrt{e^r}$$

La respuesta verdadera es la c) .

3. Sea $a_n = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2^{\left(\frac{1}{n}\right)}-1}$ el término de orden n de la sucesión $\{a_n\}$.

Mirando a la gráfica de la sucesión, establecer su convergencia o divergencia. Se verifica que :

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n) = \frac{1}{\ln(2)}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n)$ no existe

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n) = \infty$

> `restart;a:=n->ln(1+1/n)/(2^(1/n)-1);`

> `seq(a(n),n=1..20):`

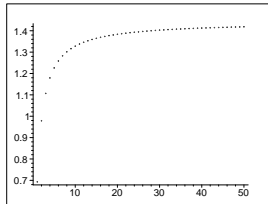
> `evalf(%);`

$$a := n \rightarrow \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{2^{\left(\frac{1}{n}\right)} - 1}$$

.6931471806, .9788793639, 1.106805594, 1.179361312, 1.226116838, 1.258762879,
 1.282851534, 1.301358810, 1.316023721, 1.327930628, 1.337790901,
 1.346090524, 1.353172943, 1.359287621, 1.364620324, 1.369312019,
 1.373471702, 1.377185115, 1.380520352, 1.383532378

> n:='n':

> plot([seq([n,a(n)],n=1..50)],style=point);



> Limit(a(n),n=infinity)=limit(a(n),n=infinity);

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{2^{\left(\frac{1}{n}\right)} - 1} = \frac{1}{\ln(2)}$$

La respuesta verdadera es la a).

4. El polinomio $x^3 - 7x + 2 = 0$ contiene una raíz r en el intervalo $(0,1)$.

Si se aproxima r por medio de la sucesión

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

, $x_{n+1} = \frac{x_n^3}{7} + \frac{2}{7}$ (para todo $n \geq 1$) (ver ejemplo 5 del apartado

Límites de sucesiones de la teoría de esta Práctica), decidir si el valor de $|r - x_8|$ es menor que

a) .00004425998400

b) .0003098198880

c) .0009294596639

Cómo en el ejemplo 5, $|x_n - r| \leq \frac{3^{(n-1)}}{7^{(n-2)} 20}$ y, para $n=8$, se obtiene que $|r - x_8|$ es menor que el valor

> restart; evalf(3^(8-1)/(7^(8-2)*20));
 .0009294596639

La respuesta verdadera es la c).

5. Sea $f(x) = x$ y sea $g(x)$ la función definida a trozos por $g(2)=1$ y $g(x)=3$ si x es distinto de 2.

Estudiar los límites laterales de " $g \circ f$ " (la función compuesta de g con f) en el punto $x=2$.

Se verifica que :

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} g(f(x)) = 3$
- b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(f(x))$ y $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(f(x))$ son distintos
- c) $\lim_{x \rightarrow 2} g(f(x)) = 1$

> **restart;**

Ya que para calcular el límite de una función en el punto 2 se consideran valores de x

cercanos pero distintos de 2, siendo $f(x)=x$, podemos definir g cómo la función constante igual a 3:

> **f:=x->x;g:=x->3;**

$$f := x \rightarrow x$$

$$g := 3$$

> **Limit((g@f)(x),x=2)=limit((g@f)(x),x=2);**

$$\lim_{x \rightarrow 2} 3 = 3$$

La respuesta verdadera es la a).

6. Observando la gráfica, encuentra un número δ tal que $|2x^2 - 18| < \frac{1}{5}$ si $|x - 3| < \delta$.

a) $\delta = .01$

b) $\delta = .05$

c) $\delta = .02$

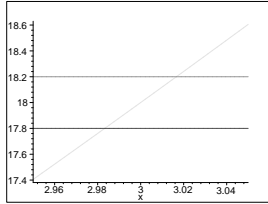
> **restart;**

Ya que $\lim_{x \rightarrow 3} 2x^2 = 18$, se trata de utilizar la definición de límite con $\varepsilon = \frac{1}{5} = 0.2$.

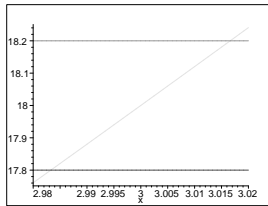
> **f:=x->2*x^2;**

$$f := x \rightarrow 2x^2$$

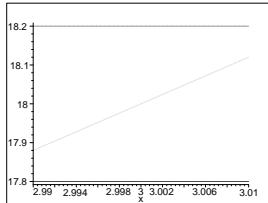
```
> plot({f(x),17.8,18.2}, x=2.95..3.05);
```



```
> plot({f(x),17.8,18.2}, x=2.98..3.02);
```



```
> plot({f(x),17.8,18.2}, x=2.99..3.01);
```



La respuesta verdadera es la a).

7. Estudia la función definida en \mathbb{R} por
- $$f(x) = x(e)^{\left(-\frac{1}{x}\right)}$$
- si $x < 0$, $f(x)=0$ si $x=0$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ si $0 < x$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} x(e)^{\left(-\frac{1}{x}\right)} = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + 1} = 1$
 - sus límites laterales en 0 son distintos
 - la función es continua en $x = 0$
- ```
> restart;
```

> Limit(x\*exp(1)^(-1/x),x=0,left)=limit(x\*exp(1)^(-1/x),x=0,left);

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x(e)^{\left(-\frac{1}{x}\right)} = -\infty$$

> Limit(sqrt(x^2+1),x=0,right)=limit(sqrt(x^2+1),x=0,right);

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + 1} = 1$$

La respuesta verdadera es la b).

8. Dada la ecuación  $2x^4 - 14x^2 + 14x - 1 = 0$ , utiliza el teorema de la raíz para verificar que

- a) existe una solución real en (-5,-4)
- b) existe una solución real en (0,1) y otra en (1,1.5)
- c) no tiene soluciones

> restart;f:=x->2\*x^4-14\*x^2+14\*x-1;

$$f := x \rightarrow 2x^4 - 14x^2 + 14x - 1$$

Por el teorema de la raíz, siendo la función  $f(x) = 2x^4 - 14x^2 + 14x - 1$  continua en toda la recta real y tal que

> f(0);f(1);f(1.5);

$$\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ -1.3750 \end{array}$$

se sigue que existe una raíz en (0,1) y otra en (1,1.5).

> fsolve(2\*x^4-14\*x^2+14\*x-1=0,x);  
-3.056721761, .07741680103, 1.163823004, 1.815481956

La respuesta verdadera es la b).

9. Utilizar el teorema del encaje y las gráficas de las funciones  $f(x) := -x$ ,  $g(x) := x(e)^{\left(\frac{x}{x+1}\right)}$  y  $h(x) := xe$

para demostrar que  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  es igual a

- a) -1
- b) 0
- c) 1

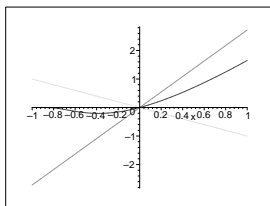
> restart;f:=x->-x; g:=x->x\*exp(1)^(x/(x+1));h:=x->x\*exp(1);

$$\begin{array}{l} f := x \rightarrow -x \\ g := x \rightarrow x(e)^{\left(\frac{x}{x+1}\right)} \end{array}$$

```

 h := x -> x e
> plot({f(x),g(x),h(x)},x=-1..1);

```



La respuesta verdadera es la b).

10. Sea  $f(x)$  la función que a cada número real  $x$  le asocia el mayor número entero menor o igual a  $x$ . Su definición en Maple V es la siguiente :  $f := x \rightarrow \text{floor}(x)$ .

Los límites de  $f(x)$  por la derecha y por la izquierda en el punto 8 son:

a)  $\lim_{x \rightarrow 8^+} \text{floor}(x)$  no existe y  $\lim_{x \rightarrow 8^-} \text{floor}(x) = 7$

b)  $\lim_{x \rightarrow 8^+} \text{floor}(x) = 8$  y  $\lim_{x \rightarrow 8^-} \text{floor}(x)$  no existe

c)  $\lim_{x \rightarrow 8^+} \text{floor}(x) = 8$  y  $\lim_{x \rightarrow 8^-} \text{floor}(x) = 7$

```

> restart;f:=x->floor(x);

```

```

 f := floor

```

```

> Limit(f(x),x=8,right)=limit(f(x),x=8,right);

```

$$\lim_{x \rightarrow 8^+} \text{floor}(x) = 8$$

```

> Limit(f(x),x=8,left)=limit(f(x),x=8,left);

```

$$\lim_{x \rightarrow 8^-} \text{floor}(x) = 7$$

La respuesta verdadera es la c).



# Capítulo 10

## Soluciones de las cuestiones sobre derivación

### 10.1 Soluciones de las cuestiones sobre derivadas e integrales (1999-2000):

1. La función derivada de la función  $\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$  es igual a la función

a)  $\frac{y-1}{y+1}$

b)  $-\frac{2}{(y+1)(y-1)}$

c)  $\frac{2y}{(y-1)^2}$

```
> restart; Diff(ln((y+1)/(y-1)),y)=simplify(diff(ln((y+1)/(y-1)),y));
```

$$\frac{\partial}{\partial y} \ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right) = -2 \frac{1}{(y+1)(y-1)}$$

La respuesta verdadera es la b) .

2. El valor de la función derivada décima de la función anterior,  $\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$ , en el punto 3 es

a) la función derivada décima no existe

b)  $\frac{264535040}{729}$

c)  $\frac{2900205}{8192}$

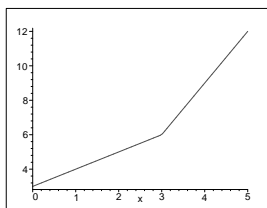
```
> subs(y=3,diff(ln((y+1)/(y-1)),y$10));
```

$$\frac{2900205}{8192}$$

La respuesta verdadera es la c) .

3. ¿Cuáles son los puntos en los que hay que evaluar la función  $f(x) = |x - 3| + 2x$  en el intervalo  $I = [0,5]$  para determinar sus extremos?
- a) 0,3,5
  - b) 0
  - c) 3,5

```
> restart; f:=x->abs(x-3)+2*x;
 f := x -> |x - 3| + 2x
> plot(f(x), x=0..5);
```



La respuesta verdadera es la a).

4. Un avión se dispone a iniciar la maniobra de aterrizaje cuando se encuentra a una distancia  $r = 10000$  metros de la cabecera de la pista y a una altura  $h = 3000$  metros. Si en ese momento vuela con una velocidad horizontal constante  $u$ , queremos determinar un polinomio cúbico cuyo grafo pudiera seguirse como trayectoria aceptable de aproximación.

¿Cuáles de los siguientes polinomios sería una solución a nuestro problema? :

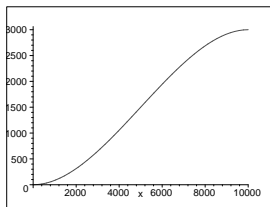
- a)  $-.60000000000 \cdot 10^{-9} x^3 + .90000000000 \cdot 10^{-5} x^2$
- b)  $-.60000000000 \cdot 10^{-8} x^3 + .000090000000000 x^2$
- c)  $-.60000000000 \cdot 10^{-5} x^3 + .0090000000000 x^2$

Se trata de utilizar la fórmula general obtenida durante esta práctica en el caso particular  $r = 10000$  y  $h = 3000$ :

```

> r:=10000;h:=3000; T(x) := -2*h*x^3/(r^3)+3*h*x^2/(r^2);
 r := 10000
 h := 3000
 T(x) := - $\frac{3}{500000000}x^3 + \frac{9}{100000}x^2$
> evalf(T(x));
 -0.6000000000 10-8 x3 + 0.0000900000000000 x2
> plot(T(x),x=0..10000);

```



La respuesta verdadera es la b).

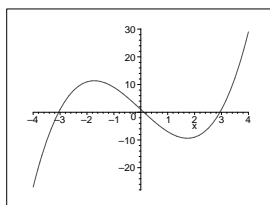
5. Sea  $f(x) = x^3 - 9x + 1$ . Dibuja su grafo y utiliza el método de Newton para aproximar una raíz a partir de los valores  $x(0)=0$  y  $x(0)=3$ . Se verifica que:

- el método no converge en los dos casos
- el método converge si  $x(0)=0$  y no converge si  $x(0)=3$
- el método converge en los dos casos

```

> restart;
> f:=x->x^3-9*x+1;
 f := x → x3 - 9x + 1
> plot(f(x),x=-4..4);

```



```

> newton:=proc(f,z,n) local i,x;
> x:=evalf(z); print(x,f(x)); for i from 1 to n do
> x:=evalf(x-f(x)/D(f)(x)); print(evalf(x),evalf(f(x))) od; end;

```

```

newton := proc(f, z, n)

```

```

local i, x;

```

```

x := evalf(z);

```

```

print(x, f(x));

```

```

for i to n do x := evalf(x - f(x) / D(f)(x)); print(evalf(x), evalf(f(x))) od

```

```

end

```

```

> newton(f,0,10);

```

```

0, 1

```

```

.1111111111, .0013717422

```

```

.1112641567, .83 10-8

```

```

.1112641576, .3 10-9

```

```

.1112641576, .3 10-9

```

```

.1112641576, .3 10-9

```

```

.1112641576, .3 10-9

```

```

.1112641576, .3 10-9

```

```

.1112641576, .3 10-9

```

```

.1112641576, .3 10-9

```

```

.1112641576, .3 10-9

```

```

> newton(f,3,10);

```

```

3., 1.

```

```

2.9444444444, .02760630

```

```

2.942821428, .00002327

```

```

2.942820058, .1 10-7

```

```

2.942820057, -.1 10-7

```

```

2.942820058, .1 10-7

```

```

2.942820057, -.1 10-7

```

```

2.942820058, .1 10-7

```

```

2.942820057, -.1 10-7

```

```

2.942820058, .1 10-7

```

2.942820057,  $-1 \cdot 10^{-7}$

La respuesta verdadera es la b).

6. Sean  $f(x) = x^2 - 1$  y  $g(x) = x - 1/2$  en  $(0,1)$ .

El área de la región limitada por  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ ,  $x = 0$  y  $x = 1$  es:

a)  $-\frac{2}{3}$

b)  $\frac{3}{2}$

c)  $\frac{2}{3}$

> restart;

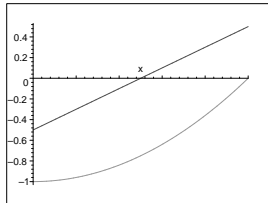
> f:=x->x^2-1;

$$f := x \rightarrow x^2 - 1$$

> g:=x->x-1/2;

$$g := x \rightarrow x - \frac{1}{2}$$

> plot({f(x),g(x)},x=0..1);



> Area=int(g(x)-f(x),x=0..1);

$$Area = \frac{2}{3}$$

La respuesta verdadera es la c).

7. Sean  $f(x) = x^2 - 1$  y  $g(x) = x - 1/2$  en  $(0,1/2)$ .

El volumen del solido de revolución obtenido rotando alrededor del eje de las  $x$  la región limitada por  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ ,  $x = 0$  y  $x = 1/2$  es:

a)  $\frac{61\pi}{160}$

b)  $-\frac{61\pi}{160}$

c)  $\frac{9\pi}{20}$

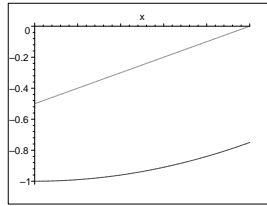
> restart;f:=x-> x^2-1 ;

$$f := x \rightarrow x^2 - 1$$

> g:=x->x-1/2;

$$g := x \rightarrow x - \frac{1}{2}$$

> plot({f(x),g(x)},x=0..1/2);



> Volumen=int(Pi\*((f(x))^2-(g(x))^2),x=0..1/2);

$$Volumen = \frac{61}{160} \pi$$

La respuesta verdadera es la a).

8. La ecuación  $x^3 + y^3 = 9xy$  determina una curva llamada "folium de Descartes". Dibuja el grafo de esta curva y encuentra la expresión de  $\frac{\partial}{\partial x} y$ .

a)  $\frac{\partial}{\partial x} y(x) = \frac{1(9y-3x^2)}{3y(x)^2}$

b)  $\frac{\partial}{\partial x} y(x) = -\frac{1(-3x^2+9y(x))}{9x}$

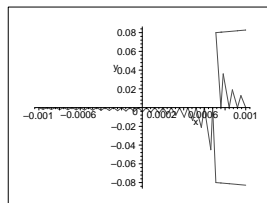
c)  $\frac{\partial}{\partial x} y(x) = \frac{-3x^2+9y(x)}{3y(x)^2-9x}$

> restart;with(plots):

> x^3+y^3=9\*x\*y;

$$x^3 + y^3 = 9xy$$

> implicitplot(x^3+y^3=9\*x\*y,x=-0.001..0.001,y=-2..2);



```
> readlib(isolate):isolate(diff(x^3+(y(x))^3
> =
> 9*x*y(x),x),diff(y(x),x));
```

$$\frac{\partial}{\partial x} y(x) = \frac{-3x^2 + 9y(x)}{3y(x)^2 - 9x}$$

La respuesta verdadera es la c).

9. El polinomio de Taylor de orden 3 de la función  $f(x) = e^{(2x-2)}$  en un entorno de  $x=0$  es:

a)  $e^{(-2)} + 2e^{(-2)}x + 2e^{(-2)}x^2 + \frac{4e^{(-2)}x^3}{3}$

b)  $1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3}$

c)  $e^{(-1)} + 2e^{(-1)}x + 2e^{(-1)}x^2 + \frac{4e^{(-1)}x^3}{3}$

```
> restart;f:=x->exp(2*x-2);
```

$$f := x \rightarrow e^{(2x-2)}$$

```
> t(x):=taylor(f(x),x=0,4);
```

$$t(x) := e^{(-2)} + 2e^{(-2)}x + 2e^{(-2)}x^2 + \frac{4}{3}e^{(-2)}x^3 + O(x^4)$$

```
> p(x):=convert(t(x),polynom);
```

$$p(x) := e^{(-2)} + 2e^{(-2)}x + 2e^{(-2)}x^2 + \frac{4}{3}e^{(-2)}x^3$$

La respuesta verdadera es la c).

10. El valor de la integral impropia  $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$  es:

a)  $2\sqrt{3}$

b)  $2\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$

c) la integral no converge

```
> restart;
```

```
> f:=x->1/sqrt(x-2);
```

$$f := x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

```
> Int(f(x),x=2..5)=int(f(x),x=2..5);
```

$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx = 2\sqrt{3}$$

La respuesta verdadera es la a).

## 10.2 Soluciones de las cuestiones sobre derivación (2000-2001):

En los siguientes tres problemas se analizan algunas tasas de cambio relevantes en aplicaciones de la teoría de la derivación a la **economía** y al **comercio**. Por tanto, fijamos la notación básica utilizada.

> #presiona return cuando termines de leer

### Términos básicos:

$x$  es el número de unidades producidas (o vendidas),

$p(x)$  es el precio por unidad que una empresa puede fijar si vende  $x$  unidades (**función de demanda**).

$R(x) = x p(x)$  es el **ingreso total** obtenido por la ventas de  $x$  unidades,

$C(x)$  es el **coste total** de producción de  $x$  unidades,

$c(x) = C(x)/x$  es el **coste medio** por unidad,

$P(x) = R(x) - C(x)$  es el **beneficio total** al vender  $x$  unidades.

El **punto de equilibrio** es el número de unidades para el cuál  $R(x)=C(x)$ .

> #presiona return cuando termines de leer

### Términos marginales:

$\frac{\partial}{\partial x} R(x)$  es el **ingreso marginal**,  $\frac{\partial}{\partial x} C(x)$  es el **coste marginal** y  $\frac{\partial}{\partial x} P(x)$  es el **beneficio marginal**.

Estas funciones representan las tasas de cambio de las funciones  $R(x)$ ,  $C(x)$ , y  $P(x)$ .

1. Sea  $x$  es el número de unidades de un producto producido por una empresa.

Se verifica que si  $x$  es un **mínimo para la función coste medio  $c(x)$**  y un **máximo para la función beneficio total  $P(x)$** , entonces

- a)  $c(x) = \frac{\partial}{\partial x} C(x) = \frac{\partial}{\partial x} R(x)$   
 b)  $c(x) = \frac{\partial}{\partial x} C(x)$  y  $\frac{\partial}{\partial x} P(x) = \frac{\partial}{\partial x} R(x)$   
 c)  $c(x) = \frac{\partial}{\partial x} P(x)$

> `restart;c:=x->C(x)/x;`

$$c := x \rightarrow \frac{C(x)}{x}$$

> `Diff(c(x),x)=diff(c(x),x);`

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{C(x)}{x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x} C(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}$$

Si  $x$  es un mínimo para la función coste medio  $c(x)$ ,  $x$  es un punto crítico de esta función y por tanto  $\frac{\partial}{\partial x} c(x)$  tiene que ser igual a 0. Se sigue que, en  $x$ , el coste marginal tiene que ser igual al coste medio:

> `isolate(diff(c(x),x)=0,diff(C(x),x));`

$$\text{isolate} \left( \frac{\frac{\partial}{\partial x} C(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} = 0, \frac{\partial}{\partial x} C(x) \right)$$

> `P:=x->R(x)-C(x);`

$$P := x \rightarrow R(x) - C(x)$$

> `Diff(P(x),x)=diff(P(x),x);`

$$\frac{\partial}{\partial x} (R(x) - C(x)) = \left( \frac{\partial}{\partial x} R(x) \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x} C(x) \right)$$

Si  $x$  es un máximo para la función beneficio total  $P(x)$ ,  $x$  es un punto crítico de esta función y por tanto  $\frac{\partial}{\partial x} P(x)$  tiene que ser igual a 0. Se sigue que, en  $x$ , el ingreso marginal  $\frac{\partial}{\partial x} R(x)$  tiene que ser igual al coste marginal  $\frac{\partial}{\partial x} C(x)$ .

La respuesta verdadera es la a) .

> `#presiona return cuando termines de leer`

2. En la comercialización de un producto se ha comprobado que la función demanda viene dada por

$$p(x) = \frac{500}{\sqrt{x}}$$

pesetas.

El coste de producción de  $x$  unidades es  $C(x) = 5x + 5000$ .

Se verifica que el precio por unidad para el el que se consigue un beneficio máximo es igual a

a) 20 pesetas

b) 10 pesetas

c) 15 pesetas

> restart;p:=x->500/sqrt(x);

$$p := x \rightarrow 500 \frac{1}{\sqrt{x}}$$

> C:= x->5\*x+500;

$$C := x \rightarrow 5x + 500$$

Por el problema 1, si el número de unidades  $x$  es un máximo para la función beneficio  $P(x)$ , entonces el ingreso marginal  $\frac{\partial}{\partial x} R(x)$  tiene que ser igual al coste marginal  $\frac{\partial}{\partial x} C(x)$  :

> R:=x->x\*p(x);

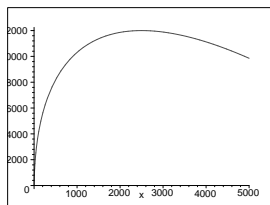
$$R := x \rightarrow x p(x)$$

> solve(diff(C(x),x)-diff(R(x),x),x);

2500

> P:=x-> R(x)-C(x);plot(P(x),x=1..5000);

$$P := x \rightarrow R(x) - C(x)$$



> P(1);evalf(P(2500));evalf(P(3000));

-5

12000.

11886.12788

Ya que  $x=2500$  es el único punto crítico de la función  $P(x)$  y  $P(1) = -5$ ,  $P(3000) < P(2500)$ ,

se sigue que el precio por unidad para el que se consigue un beneficio máximo es igual a

>  $p(\%)$ ;

4.586166370

La respuesta verdadera es la b) .

> #presiona return cuando termines de leer

3. El coste  $C(x)$  de pedido y transporte de las componentes utilizadas en la fabricación de un cierto producto es

$$C(x) = 100 \left( \frac{200}{x^2} + \frac{x}{x+30} \right) \quad (1 \leq x)$$

donde  $C(x)$  se mide en miles de dólares y  $x$  es el tamaño del pedido en cientos de unidades. El tamaño  $x$  que minimiza el coste es

a) 10.62505428

b) 13.55695401

c) 40.44724133

> restart; C := x -> 100 \* (200 / (x^2) + x / (x + 30));

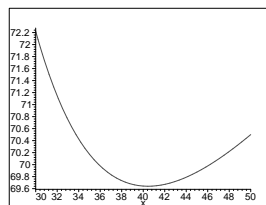
$$C := x \rightarrow 20000 \frac{1}{x^2} + 100 \frac{x}{x+30}$$

Los puntos críticos de  $C(x)$  son

> evalf(solve(diff(C(x), x)));

40.44724133, -13.55695401 + 10.62505428 I, -13.55695401 - 10.62505428 I

> plot(C(x), x=30..50);



La respuesta verdadera es la c) .

> #presiona return cuando termines de leer

4. En el intervalo  $[-20,20]$  la función  $f(x) = \frac{x^2+7x+3}{x^2}$

a) tiene un máximo absoluto

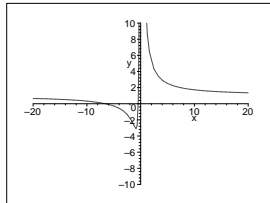
b) no tiene extremos relativos

c) tiene un mínimo absoluto

> restart;f:=x->(x^2+7\*x+3)/(x^2);(x^2+7\*x+3)/(x^2);

$$f := x \rightarrow \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2}$$

> plot(f(x),x=-20..20,y=-10..10);



La respuesta verdadera es la c) .

> #presiona return cuando termines de leer

5. El valor de la función derivada de orden 5 de la función  $\tan(\cos(2x^4 - \ln(2x)))$ , en el punto  $x=1$  es

a)  $-54109.3060$

b)  $-214.0054479$

c) la derivada de la función no existe en  $x=1$

> restart;evalf(subs(x=1,diff(tan(cos(2\*x^4-ln(2\*x))),x\$5)));

$-54109.30604$

La respuesta verdadera es la a) .

> #presiona return cuando termines de leer

6. ¿Cuáles son los puntos en los que hay que evaluar la función  $f(x) = \left|4x^3 - \frac{5x}{2}\right|$

para determinar sus extremos en el intervalo  $I = [-1/4, 1/4]$  ?

a)  $-1/4, 1/4$

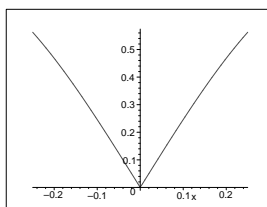
b) 0

c)  $-1/4, 0, 1/4$

> restart; f:=x->abs(4\*x^3-5\*x/2);

$$f := x \rightarrow \left|4x^3 - \frac{5}{2}x\right|$$

> plot(f(x), x=-1/4..1/4);



> Diff(f(x), x)=diff(f(x), x);

$$\frac{\partial}{\partial x} \left|4x^3 - \frac{5}{2}x\right| = \text{abs}(1, 4x^3 - \frac{5}{2}x) (12x^2 - \frac{5}{2})$$

La respuesta verdadera es la c).

> #presiona return cuando termines de leer

7. La derivada de la función  $y(x)$  definida implícitamente por la ecuación

$$x^2 y(x)^2 = (y(x) + 1)^2 (4 - y(x))$$

es igual a

a)  $\frac{\partial}{\partial x} y(x) = -\frac{2xy(x)^2}{2x^2y(x)+3y(x)^2-12}$

b)  $\frac{\partial}{\partial x} y(x) = -\frac{2xy(x)^2}{2x^2y(x)-4y(x)+3y(x)^2-7}$

$$c) \frac{\partial}{\partial x} y(x) = -\frac{2xy(x)^2}{2x^2y(x)+4y(x)+3y(x)^2-15}$$

> restart;

> expr1:=x^(2)\*y(x)^(2)=(y(x)+1)^2\*(4-y(x));

$$\text{expr1} := x^2 y(x)^2 = (y(x) + 1)^2 (4 - y(x))$$

> diff(x^(2)\*y(x)^(2)=(y(x)+1)^2\*(4-y(x)), x);

$$2xy(x)^2 + 2x^2y(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}y(x)\right) = 2(y(x)+1)(4-y(x))\left(\frac{\partial}{\partial x}y(x)\right) - (y(x)+1)^2\left(\frac{\partial}{\partial x}y(x)\right)$$

Para despejar la expresión  $\frac{\partial}{\partial x}y$  se utiliza el comando **isolate**:

> readlib(isolate):simplify(isolate(diff(x^(2)\*y(x)^(2)=(y(x)+1)^2\*(4-y(x)), x), diff(y(x), x)));

$$\frac{\partial}{\partial x}y(x) = -2\frac{xy(x)^2}{2x^2y(x) - 4y(x) + 3y(x)^2 - 7}$$

La respuesta verdadera es la b).

> #presiona return cuando termines de leer

8. Sean  $g(x) = x^4$  y  $h(x) = x+3$ . Dibuja sus gráficas y utiliza el método de Newton con punto inicial  $z=1.5$  para aproximar, con siete decimales, las coordenadas  $x$  de uno de sus puntos de intersección. Se verifica que para obtener el grado de precisión pedido hay que aplicar el procedimiento **newton:=proc(f,z,n)** (ver teoría de esta práctica) a la función  $f(x) = g(x)-h(x)$  con

a)  $n$  al menos igual a 2

b)  $n$  al menos igual a 3

c)  $n$  al menos igual a 4

> restart;

> g:=x->x^4; h:=x->x+3;f:=x->x^4-x-3;

$$g := x \rightarrow x^4$$

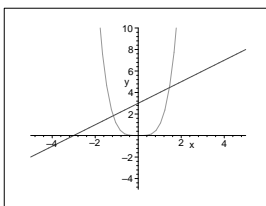
$$h := x \rightarrow x + 3$$

$$f := x \rightarrow x^4 - x - 3$$

> fsolve(f(x), x);

$$-1.164035140, 1.452626879$$

> with(plots):plot({g(x), h(x)}, x=-5..5, y=-5..10);



```
> newton:=proc(f,z,n) local i,x;
> x:=evalf(z); print(x,f(x)); for i from 1 to n do
> x:=evalf(x-f(x)/D(f)(x)); print(evalf(x),evalf(f(x))) od; end;
```

```
newton := proc(f, z, n)
```

```
local i, x;
```

```
 x := evalf(z);
```

```
 print(x, f(x));
```

```
 for i to n do x := evalf(x - f(x)/D(f)(x)); print(evalf(x), evalf(f(x))) od
```

```
end
```

```
> newton(f,1.5,2);
```

```
1.5, .5625
```

```
1.455000000, .026794851
```

```
1.452633191, .000071081
```

```
> newton(f,1.5,3);
```

```
1.5, .5625
```

```
1.455000000, .026794851
```

```
1.452633191, .000071081
```

```
1.452626879, .2 10-8
```

La respuesta verdadera es la b).

```
> #presiona return cuando termines de leer
```

9. El polinomio de Taylor de orden 5 de la función  $f(x) = 2^{\ln(3x^3+2)}$  en un entorno de  $x=0$  es:

a)  $1.616806672 + 1.681027479 x^3 - .3868710161 x^6$

b)  $1.616806672 + 1.681027479 x^3$

c)  $2.141486065 + 1.484365028 x^3$

```
> restart;f:=x-> 2^(ln(3*x^3+2));
```

```

f := x -> 2ln(3x3+2)
> t(x) := taylor(f(x), x=0, 6);
t(x) := e(ln(2)2) + $\frac{3}{2} e^{(\ln(2)^2)} \ln(2) x^3 + O(x^6)$
> p(x) := evalf(convert(t(x), polynomial));
p(x) := 1.616806672 + 1.681027479 x3

```

La respuesta verdadera es la b).

```
> #presiona return cuando termines de leer
```

10. Si  $R(x)$  denota la *reacción* de un cuerpo a algún estímulo de tamaño  $x$ , la *sensibilidad*  $S(x)$  se define como

la tasa de cambio de la reacción respecto de  $x$ .

Por ejemplo, si la intensidad  $x$  de una fuente de luz crece, el ojo reacciona disminuyendo el área  $R(x)$  de la pupila según la fórmula experimental

$$R(x) = \frac{40 + 24x^{(2/5)}}{1 + 4x^{(2/5)}}$$

si  $0 \leq x$ .

Mirando a una gráfica, se observa que:

- a)  $R(x)$  y  $S(x)$  son decrecientes
- b)  $R(x)$  y  $S(x)$  son crecientes
- c)  $R(x)$  es decreciente y  $S(x)$  es creciente

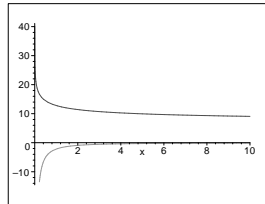
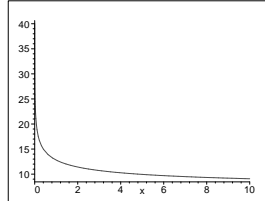
```
> restart; R:=x->(40+24*x^(2/5))/(1+4*x^(2/5));
```

$$R := x \rightarrow \frac{40 + 24x^{(2/5)}}{1 + 4x^{(2/5)}}$$

```
> S:=simplify(diff(R(x), x));
```

$$S := -\frac{272}{5} \frac{1}{(1 + 4x^{(2/5)})^2 x^{(3/5)}}$$

```
> plot(R(x), x=0..10); plot({R(x), S(x)}, x=0..10);
```



La respuesta verdadera es la c).

```
> #fin
```

# Capítulo 11

## Soluciones de las cuestiones sobre integración

### 11.1 Soluciones de las cuestiones sobre integración (2000-2001):

1. Estudia la convergencia o la divergencia de la integral  $\int_0^{\infty} \frac{1}{(e)^x+15} dx$

a) La integral diverge

b) La integral converge a  $\frac{1 \ln(e+15)}{15} - \frac{1}{15}$

c) La integral converge a  $\frac{4 \ln(2)}{15}$

```
> restart; Int(1/(exp(1)^x+15), x = 0 ..
> infinity)=int(1/(exp(1)^x+15), x
> = 0 .. infinity);
```

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(e)^x + 15} dx = \frac{4}{15} \ln(2)$$

La respuesta verdadera es la c) .

```
> #presiona return cuando termines de leer
```

2. Estudia la convergencia o la divergencia de la integral  $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} dx$ .

a) La integral converge a .9772817885

b) La integral converge a  $\frac{1 \ln(e+15)}{15} - \frac{1}{15}$

c) La integral converge a .3473148625

```
> restart; Int(1/sqrt(x^4-1), x = 1 ..
> 3)=int(1/sqrt(x^4-1), x = 1 ..
> 3);
```

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{2} \operatorname{EllipticF}\left(\frac{2}{3} \sqrt{2}, \frac{1}{2} \sqrt{2}\right)$$

```
> evalf(%);
.9772817891 = .9772817885
```

La respuesta verdadera es la a) .

```
> #presiona return cuando termines de leer
```

3. Sea  $F(x) = \left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^2$  y sea  $G(x) = e^{(x^2)}$ . Se puede verificar que  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = \infty$ .

Utilizando la regla de L'Hôpital para calcular  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{G(x)}$  se verifica que este límite es igual a

- a) 3
- b) 0
- c) no existe

```
> restart;
> F:=x-> int(exp(t^2), t = 0 .. x)^2;
```

$$F := x \rightarrow \left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^2$$

```
> G:=x->exp(x^2);
```

$$G := x \rightarrow e^{(x^2)}$$

```
> F1:=x->diff(F(x), x);
```

$$F1 := x \rightarrow \operatorname{diff}(F(x), x)$$

```
> G1:=x->diff(G(x), x);
```

$$G1 := x \rightarrow \operatorname{diff}(G(x), x)$$

```
> limit(F1(x)/G1(x), x=infinity);
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} \frac{\operatorname{erf}(Ix) \sqrt{\pi}}{x}$$

```
> evalf(%);
```

$\infty$

La respuesta verdadera es la c).

> #presiona return cuando termines de leer

4. Sean  $f(x) = x^2 - 6$  y  $g(x) = 12 - x^2$  en  $[-5, 5]$ .

El área de la región limitada por  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ ,  $x = -5$  y  $x = 5$  es:

- a)  $\frac{392}{3}$   
 b)  $-\frac{392}{3}$   
 c)  $\frac{376}{3}$

> restart;

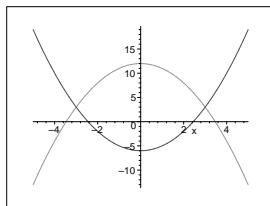
> f:=x->x^2-6;

$$f := x \rightarrow x^2 - 6$$

> g:=x->12-x^2;

$$g := x \rightarrow 12 - x^2$$

> plot({f(x),g(x)},x=-5..5);



> solve(f(x)-g(x),x);

$$3, -3$$

> int(f(x)-g(x),x=-5..-3)+int(g(x)-f(x),x=-3..3)+int(f(x)-g(x),x=3..5);

$$\frac{392}{3}$$

> A:=Int(abs(g(x)-f(x)),x=-5..5)=int(abs(g(x)-f(x)),x=-5..5);

$$A := \int_{-5}^5 |2x^2 - 18| dx = \frac{392}{3}$$

La respuesta verdadera es la a).

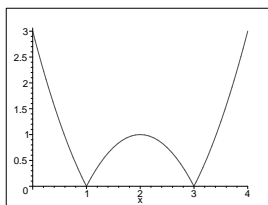
> #presiona return cuando termines de leer

5. Hallar el área encerrada por la gráfica de la función  $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$  entre  $x=0$  y  $x=4$ .

- a) 3  
 b) 4

c) -2

```
> restart;
> f:=x->abs(x^2-4*x+3);
 $f := x \rightarrow |x^2 - 4x + 3|$
> plot(f(x), x=0..4);
```



```
> A:=Int(f(x), x=0..4)=int(f(x), x=0..4);
```

$$A := \int_0^4 |x^2 - 4x + 3| dx = 4$$

La respuesta verdadera es la b).

```
> #presiona return cuando termines de leer
```

6. Hallar el área encerrada por la gráfica de la función  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  y su asíntota.

a)  $2\pi$

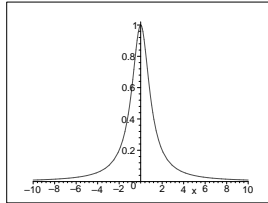
b)  $\pi$

c)  $\frac{\pi}{2}$

```
> restart;
> f:=x->1/(1+x^2);
```

$$f := x \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$$

```
> plot(f(x),x);
```



La única asíntota de la curva es  $y=0$ .

```
> Int(f(x),x=-infinity..infinity)=int(f(x),x=-infinity..infinity);
```

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$

La respuesta verdadera es la b).

```
> #presiona return cuando termines de leer
```

7. Sean  $f(x) = x^2 - 6$  y  $g(x) = 12 - x^2$  en  $[-5,5]$ . (Ver Problema 4)

El volumen del sólido de revolución obtenido rotando alrededor del eje de las  $x$  la región limitada por

$y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ ,  $x = -5$  y  $x = 5$  es:

a)  $784\pi$

b)  $-784\pi$

c)  $608\pi$

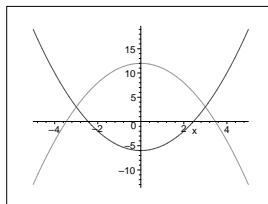
```
> restart;f:=x-> x^2-6;
```

$$f := x \rightarrow x^2 - 6$$

```
> g:=x->12-x^2;
```

$$g := x \rightarrow 12 - x^2$$

```
> plot({f(x),g(x)},x=-5..5);
```



```
> solve(f(x)-g(x),x);
```

3, -3

```
> Volumen=int(Pi*((f(x))^2-(g(x))^2),x=-5..-3)+int(Pi*((g(x))^2-(f(x))^2),x=-3..3)+int(Pi*((f(x))^2-(g(x))^2),x=3..5);
```

$$Volumen = 784 \pi$$

```
> Int(Pi*abs((f(x))^2-(g(x))^2),x=-5..5)=int(Pi*abs((f(x))^2-(g(x))^2),x=-5..5);
```

$$\int_{-5}^5 \pi |(x^2 - 6)^2 - (12 - x^2)^2| dx = 784 \pi$$

La respuesta verdadera es la a).

```
> #presiona return cuando termines de leer
```

8. Sea  $C$  la circunferencia de radio 2 con centro en el punto  $(3,0)$ . La ecuación que define  $C$  es  $(x - 3)^2 + y^2 = 4$ .

El volumen del solido de revolución obtenido rotando alrededor del eje de las  $y$  y la región limitada por  $C$  es:

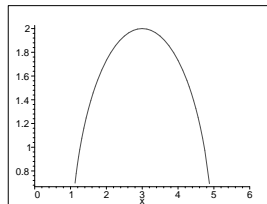
a)  $24 \pi^2$ b)  $12 \pi^2$ c)  $6 \pi^2$ 

```
> restart;
```

```
> f:=x->sqrt(4-(x-3)^2);
```

$$f := x \rightarrow \sqrt{4 - (x - 3)^2}$$

```
> plot(f(x),x=0..6);
```



```
> Volumen := 2*Int(2*Pi*x*f(x),x = 1..5)=2*int(2*Pi*x*f(x),x=1..5);
```

$$Volumen := 2 \int_1^5 2 \pi x \sqrt{-5 - x^2 + 6x} dx = 24 \pi^2$$

La respuesta verdadera es la a).

```
> #presiona return cuando termines de leer
```

9. Halla el valor de la constante  $C$  tal que la integral impropia  $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+1} - \frac{C}{3x+1} dx$  converge.

a) la integral diverge para todo valor de  $C$

b)  $C = 0$

c)  $C = 3$

> restart;

> Int(x/(x^2+1)-C/(3\*x+1),x=0..a)=int(x/(x^2+1)-C/(3\*x+1),x=0..a);

$$\int_0^a \frac{x}{x^2+1} - \frac{C}{3x+1} dx = \frac{1}{2} \ln(a^2+1) - \frac{1}{3} C \ln(3a+1)$$

> limit(int(x/(x^2+1)-C/(3\*x+1),x=0..a),a=infinity);

$$-\text{signum}(C-3) \infty$$

La respuesta verdadera es la c).

> #presiona return cuando termines de leer

10. Verifica que la integral impropia  $\int_{-c}^{\infty} x dx$  diverge. Ahora calcula  $\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c x dx$ .

Se verifica que:

a)  $\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c x dx$  diverge

b)  $\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c x dx = \frac{1}{2}$

c)  $\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c x dx = 0$

> restart;

> Int(x,x=-infinity..infinity)=int(x,x=-infinity..infinity);

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dx = \text{undefined}$$

> Limit(Int(x,x=-c..c),c=infinity)=limit(int(x,x=-c..c),c=infinity);

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c x dx = 0$$

La respuesta verdadera es la c).

> #presiona return cuando termines de leer



## Parte IV

# Soluciones de los exámenes



## Capítulo 12

### Soluciones de los exámenes (1999-2000)

Bases de MatemáticasInformática de Sistemas y de Gestión. Febrero 2000.Soluciones del examen A.

1)

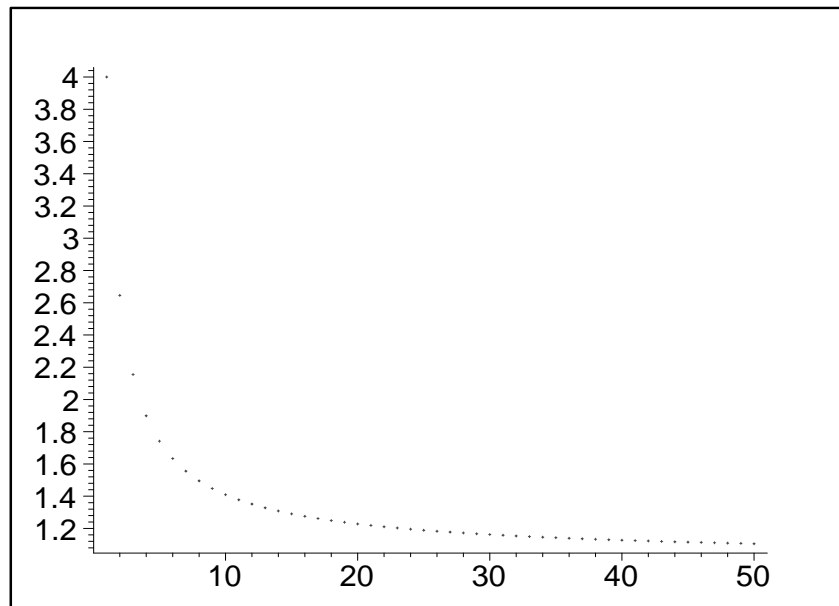
&gt; restart;

&gt; a:=n-&gt;(1+3\*n)^(1/n);

$$a := n \rightarrow (1 + 3n)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

&gt; n:='n':

&gt; plot([seq([n,a(n)],n=1..50)],style=point);



&gt; Limit(a(n),n=infinity)=limit(a(n),n=infinity);

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 3n)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = 1$$

2)

&gt; restart;

```

> f:=x->sin(3*x);
 f := x → sin(3x)
> I1:=int(f(x),x=0..2);
 I1 := -1/3 cos(6) + 1/3
> g:=x->arctan(x);
 g := arctan
> I2:=int(g(x),x=2..4);
 I2 := 4 arctan(4) - 1/2 ln(17) - 2 arctan(2) + 1/2 ln(5)
> I=(I1+I2);
 I = -1/3 cos(6) + 1/3 + 4 arctan(4) - 1/2 ln(17) - 2 arctan(2) + 1/2 ln(5)
> evalf(I1+I2);
 2.490362075

3)
> restart;
> f:=x->sec(x)/(1+tan(x));
 f := x → sec(x) / (1 + tan(x))
> evalf(subs(x=1,diff(f(x),x$2)));
 .792468252

4)
> restart;f:=x-> 3*x^5-4*x^3+2*x-6;
 f := x → 3x5 - 4x3 + 2x - 6
> t(x):=taylor(f(x),x=1,6);
t(x) := -5 + 5(x - 1) + 18(x - 1)2 + 26(x - 1)3 + 15(x - 1)4 + 3(x - 1)5
> p(x):=convert(t(x),polynom);
p(x) := -10 + 5x + 18(x - 1)2 + 26(x - 1)3 + 15(x - 1)4 + 3(x - 1)5

5)
> restart;

```

> `f:=x->sqrt(3*x-1);`

$$f := x \rightarrow \sqrt{3x - 1}$$

> `g:=x->1/ln(x);`

$$g := x \rightarrow \frac{1}{\ln(x)}$$

> `Limit(evalf(g@f)(x),x=1)=limit(evalf(g@f)(x),x=1);`

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln(\sqrt{3x - 1})} = 2 \frac{1}{\ln(2)}$$

6)

> `restart;`

> `z:=(2+3*I)/(1-5*I); convert(z,polar);`

$$z := -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}I$$
$$\text{polar}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi\right)$$

Bases de Matemáticas

Informática de Sistemas y de Gestión. Febrero 2000.

Soluciones del examen B.

1)

> restart;

> z:=3/(4-3\*I); argument(z);

$$z := \frac{12}{25} + \frac{9}{25} I$$

$$\arctan\left(\frac{3}{4}\right)$$

2)

> restart;

> f:=x-(2\*x+1)/(3\*x+2);

$$f := x \rightarrow \frac{2x + 1}{3x + 2}$$

> g:=x-(2\*x-1)/(2-3\*x);

$$g := x \rightarrow \frac{2x - 1}{2 - 3x}$$

> Limit(evalf(g@f)(x),x=1)=limit(evalf(g@f)(x),x=1);

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \frac{2x + 1}{3x + 2} - 1}{2 - 3 \frac{2x + 1}{3x + 2}} = 1$$

3)

> restart;f:=x-> 3\*(x-1)^6+4\*x-4;

$$f := x \rightarrow 3(x - 1)^6 + 4x - 4$$

> t(x):=taylor(f(x),x=0,6);

$$t(x) := -1 - 14x + 45x^2 - 60x^3 + 45x^4 - 18x^5 + O(x^6)$$

> p(x):=convert(t(x),polynom);

$$p(x) := -1 - 14x + 45x^2 - 60x^3 + 45x^4 - 18x^5$$

4)

```

> restart;
> a:=n->((sin(n))^2)/n;

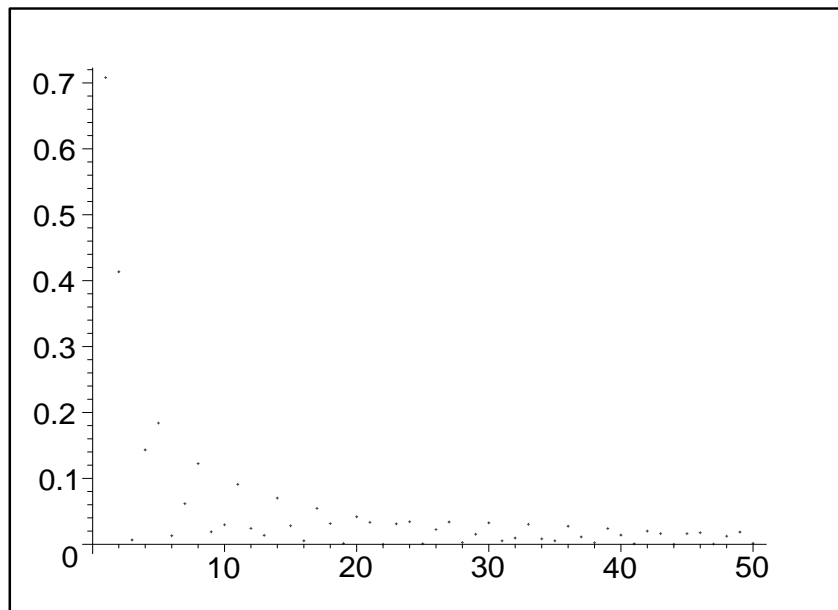
```

$$a := n \rightarrow \frac{\sin(n)^2}{n}$$

```

> n:='n':
> plot([seq([n,a(n)],n=1..50)],style=point);

```



```

> Limit(a(n),n=infinity)=limit(a(n),n=infinity);

```

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)^2}{n} = 0$$

5)

```

> restart;
> f:=x->cot(1/(1+x^2));

```

$$f := x \rightarrow \cot\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

```

> evalf(subs(x=1,diff(f(x),x$2)));
1.806595362

```

```

6)
> restart;
> f:=x->x^3-2*x^2;
 f := x → x3 - 2x2
> I1:=int(f(x),x=-1..0);
 I1 := $-\frac{11}{12}$
> g:=x->arctan(x);
 g := arctan
> I2:=int(g(x),x=0..Pi/2);
 I2 := $\frac{1}{2}\pi \arctan\left(\frac{1}{2}\pi\right) + \ln(2) - \frac{1}{2}\ln(4 + \pi^2)$
> I=(I1+I2);
 I = $-\frac{11}{12} + \frac{1}{2}\pi \arctan\left(\frac{1}{2}\pi\right) + \ln(2) - \frac{1}{2}\ln(4 + \pi^2)$
> evalf(I1+I2);
 .038529249

```

Bases de MatemáticasInformática de Sistemas y de Gestión. Febrero 2000.Soluciones del examen C.

1)

&gt; restart; f:=x-&gt; ln(x+1);

$$f := x \rightarrow \ln(x + 1)$$

&gt; t(x):=taylor(f(x),x=0,7);

$$t(x) := x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + O(x^7)$$

&gt; p(x):=convert(t(x),polynom);

$$p(x) := x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6$$

2)

&gt; restart;

&gt; f:=x-&gt;x^2+2\*x;

$$f := x \rightarrow x^2 + 2x$$

&gt; I1:=int(f(x),x=0..1);

$$I1 := \frac{4}{3}$$

&gt; g:=x-&gt;-2\*ln(x);

$$g := x \rightarrow -2\ln(x)$$

&gt; I2:=int(g(x),x=1..4);

$$I2 := -16\ln(2) + 6$$

&gt; I=(I1+I2);

$$I = \frac{22}{3} - 16\ln(2)$$

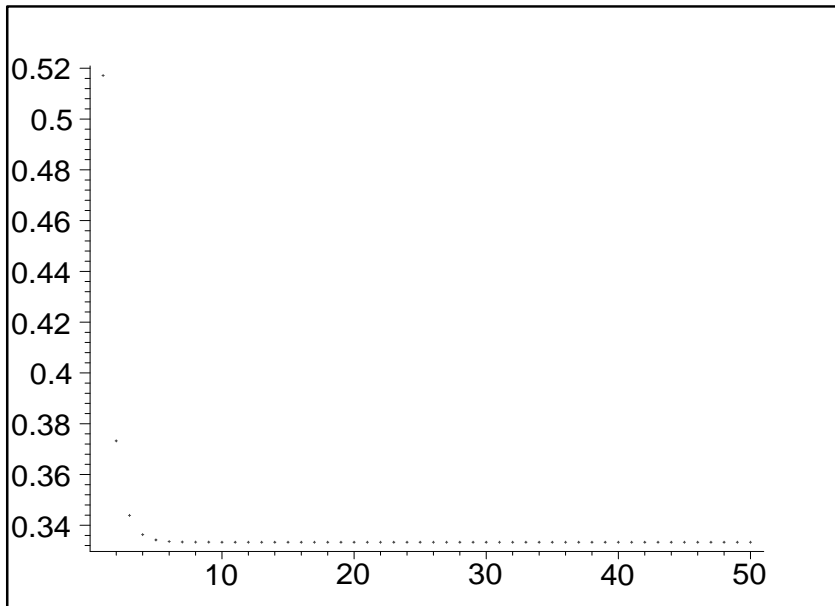
&gt; evalf(I1+I2);

$$-3.757021557$$

3)

&gt; restart;

```
> a:=n->ln(2+exp(n))/(3*n);
 a := n → $\frac{1}{3} \frac{\ln(2 + e^n)}{n}$
> n:='n':
> plot([seq([n,a(n)],n=1..50)],style=point);
```



```
> Limit(a(n),n=infinity)=limit(a(n),n=infinity);
```

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \frac{\ln(2 + e^n)}{n} = \frac{1}{3}$$

4)

```
> restart;
> f:=x->x^2+1/2;
```

$$f := x \rightarrow x^2 + \frac{1}{2}$$

```
> g:=x->arcsin(x);
```

$$g := \arcsin$$

```
> Limit(evalf(g@f)(x),x=1/2)=limit(evalf(g@f)(x),x=1/2);
```

$$\lim_{x \rightarrow (1/2)} \arcsin\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) = \arcsin\left(\frac{3}{4}\right)$$

> evalf(%);

$$\lim_{x \rightarrow (1/2)} \arcsin\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) = .8480620790$$

5)

> restart;

> z:=evalc((2\*sqrt(3)+2\*I)^5);

$$z := 512 I - 512 \sqrt{3}$$

6)

> restart;

> readlib(isolate):isolate(diff(sin(x+y(x))

> =

> (y(x)^2\*cos(x),x),diff(y(x),x));

$$\frac{\partial}{\partial x} y(x) = \frac{-y(x)^2 \sin(x) - \cos(x + y(x))}{\cos(x + y(x)) - 2y(x) \cos(x)}$$

Bases de Matemáticas

Informática de Sistemas y de Gestión. Febrero 2000.

Soluciones del examen D.

1)

```
> restart;
> readlib(isolate):isolate(diff(x
> =(1-sqrt(y(x)))/(1+sqrt(y(x))),x),diff(y(x),x));
```

$$\frac{\partial}{\partial x} y(x) = -\frac{1}{\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{y(x)}(1+\sqrt{y(x)})} + \frac{1}{2} \frac{1-\sqrt{y(x)}}{(1+\sqrt{y(x)})^2 \sqrt{y(x)}}$$

2)

```
> restart;solve(z^4+11*z^2+18);
 I√2, -I√2, 3I, -3I
```

3)

```
> restart;
> f:=x->1/(x+2);
```

$$f := x \rightarrow \frac{1}{x+2}$$

```
> g:=x->x+1/x;
```

$$g := x \rightarrow x + \frac{1}{x}$$

```
> Limit(evalf(g@f)(x),x=-1)=limit(evalf(g@f)(x),x=-1);
```

$$\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{1}{x+2} + x + 2 = 2$$

4)

```
> restart;f:=x-> 1/(1-x);
```

$$f := x \rightarrow \frac{1}{1-x}$$

```
> t(x):=taylor(f(x),x=0,8);
```

$$t(x) := 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + O(x^8)$$

```
> p(x):=convert(t(x),polynom);
```

$$p(x) := 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7$$

5)

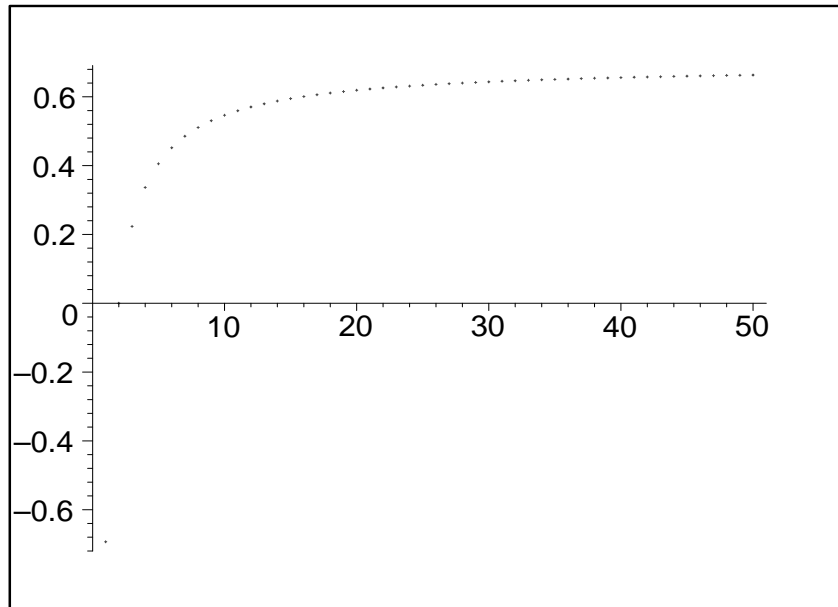
```
> restart;
```

```
> a:=n->int(1/x,x=1+(1/n)..2-(1/n));
```

$$a := n \rightarrow \int_{1+\frac{1}{n}}^{2-\frac{1}{n}} \frac{1}{x} dx$$

```
> n:='n':
```

```
> plot([seq([n,a(n)],n=1..50)],style=point);
```



```
> Limit(a(n),n=infinity)=limit(a(n),n=infinity);
```

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(2)$$

6)

```
> restart;
> f:=x->sin(x)/x;
 $f := x \rightarrow \frac{\sin(x)}{x}$
> I1:=int(f(x),x=0..1);
 $I1 := \text{Si}(1)$
> g:=x->1;
 $g := 1$
> I2:=int(g(x),x=-1..0);
 $I2 := 1$
> I=(I1+I2);
 $I = \text{Si}(1) + 1$
> evalf(I1+I2);
 1.946083070
```

Bases de MatemáticasInformática de Sistemas y de Gestión. Febrero 2000.Soluciones del examen E.

1)

```
> restart;
> solve(z^3=(1+I), z);
```

$$(1 + I)^{(1/3)}, -\frac{1}{2}(1 + I)^{(1/3)} + \frac{1}{2}I\sqrt{3}(1 + I)^{(1/3)}, -\frac{1}{2}(1 + I)^{(1/3)} - \frac{1}{2}I\sqrt{3}(1 + I)^{(1/3)}$$

2)

```
> restart;
> f:=x->arctan(x^2/sqrt(x+1));
```

$$f := x \rightarrow \arctan\left(\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}\right)$$

```
> g:=x->abs(1/x);
```

$$g := x \rightarrow \left|\frac{1}{x}\right|$$

```
> Limit(evalf(g@f)(x), x=0)=limit(evalf(g@f)(x), x=0);
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\left|\arctan\left(\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}\right)\right|} = \infty$$

3)

```
> restart;
> f:=x->1/(x*ln(x)^2);
```

$$f := x \rightarrow \frac{1}{x \ln(x)^2}$$

```
> Int(f(x), x=exp(1)..infinity)=int(f(x), x=exp(1)..infinity);
```

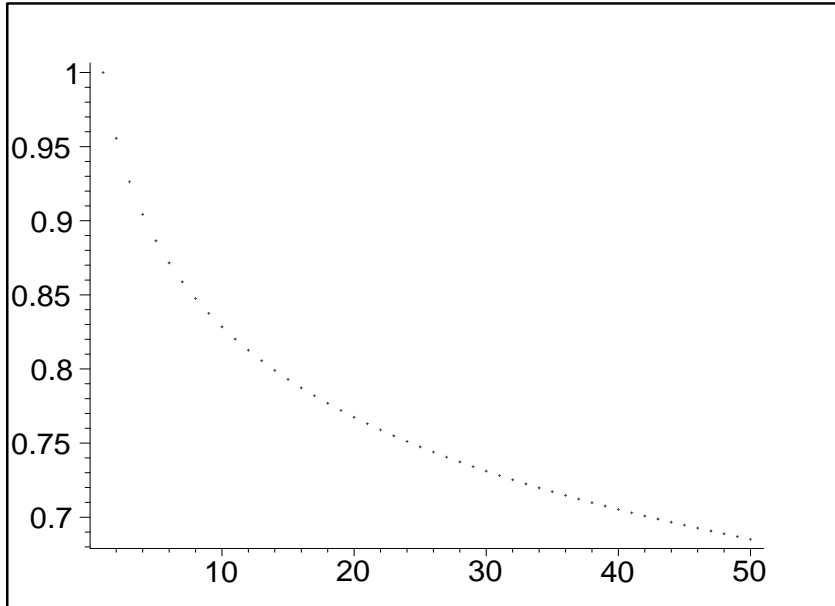
$$\int_e^{\infty} \frac{1}{x \ln(x)^2} dx = 1$$

4)

```
> restart;
> a:=n->(n^(1/3)+n^(1/4))/(sqrt(n)+n^(1/5));
```

$$a := n \rightarrow \frac{n^{(1/3)} + n^{(1/4)}}{\sqrt{n} + n^{(1/5)}}$$

```
> n:='n':
> plot([seq([n,a(n)],n=1..50)],style=point);
```



```
> Limit(a(n),n=infinity)=limit(a(n),n=infinity);
```

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{(1/3)} + n^{(1/4)}}{\sqrt{n} + n^{(1/5)}} = 0$$

5)

```
> restart;f:=x-> sqrt(x+1);
```

$$f := x \rightarrow \sqrt{x+1}$$

```
> t(x):=taylor(f(x),x=0,5);
```

$$t(x) := 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \frac{21}{1024}x^6 + O(x^7)$$

```
> p(x):=convert(t(x),polynom);
```

$$p(x) := 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \frac{21}{1024}x^6$$

6)

```
> restart;
> readlib(isolate):isolate(diff(6=sqrt(x+y(x))+sqrt(x*y(x)),x),diff(y(x)
>),x));
```

$$\frac{\partial}{\partial x} y(x) = \frac{-\sqrt{xy(x)} - \sqrt{x+y(x)}y(x)}{\sqrt{xy(x)} + \sqrt{x+y(x)}x}$$

Bases de MatemáticasInformática de Sistemas y de Gestión. Febrero 2000.Soluciones del examen F.

1)

```
> restart;
> readlib(isolate): isolate(diff(x^3=y(x)^4+x^2*sin(y(x))+1,x),diff(y(x)
> ,x));
```

$$\frac{\partial}{\partial x} y(x) = \frac{-3x^2 + 2x \sin(y(x))}{-4y(x)^3 - x^2 \cos(y(x))}$$

2)

```
> restart;f:=x-> 1/(2*x+1);
```

$$f := x \rightarrow \frac{1}{2x + 1}$$

```
> t(x):=taylor(f(x),x=0,7);
```

$$t(x) := 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + 16x^4 - 32x^5 + 64x^6 + O(x^7)$$

```
> p(x):=convert(t(x),polynom);
```

$$p(x) := 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + 16x^4 - 32x^5 + 64x^6$$

3)

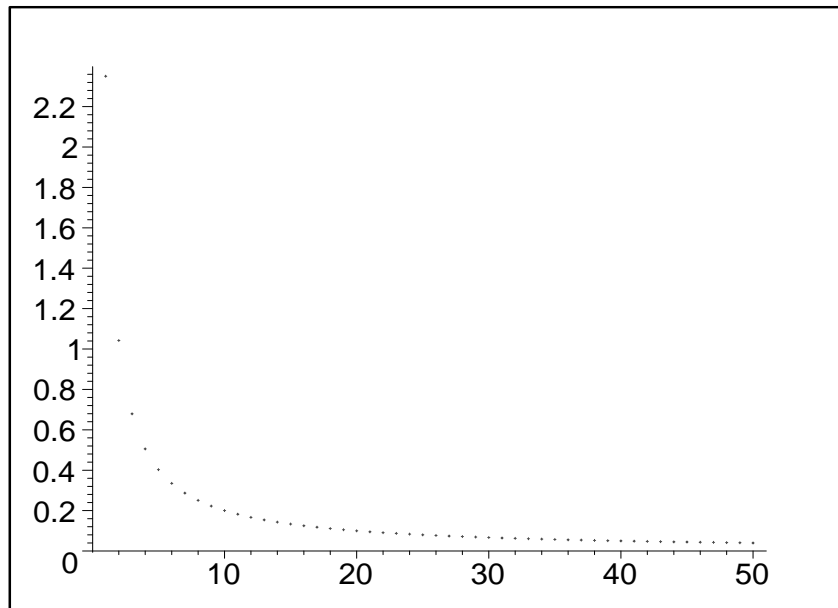
```
> restart;
```

```
> a:=n->int(exp(x),x=-1/n..1/n);
```

$$a := n \rightarrow \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} e^x dx$$

```
> n:='n':
```

```
> plot([seq([n,a(n)],n=1..50)],style=point);
```



> Limit(a(n), n=infinity)=limit(a(n), n=infinity);

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\left(\frac{1}{n}\right)} - e^{\left(-\frac{1}{n}\right)} = 0$$

4)

> restart;

> solve(z^4=3\*z^2-4);

$$\frac{1}{2} \sqrt{6 + 2I\sqrt{7}}, -\frac{1}{2} \sqrt{6 + 2I\sqrt{7}}, \frac{1}{2} \sqrt{6 - 2I\sqrt{7}}, -\frac{1}{2} \sqrt{6 - 2I\sqrt{7}}$$

5)

> restart;

> f:=x->sin(x)/sqrt(1+cos(x));

$$f := x \rightarrow \frac{\sin(x)}{\sqrt{1 + \cos(x)}}$$

> Int(f(x), x=0..Pi)=int(f(x), x=0..Pi);

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1 + \cos(x)}} dx = 2\sqrt{2}$$

6)

```
> restart;
```

```
> f:=x->abs(x^2-2);
```

$$f := x \rightarrow |x^2 - 2|$$

```
> g:=x->arcsin(1/x);
```

$$g := x \rightarrow \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$$

```
> Limit(evalf(g@f)(x),x=0)=limit(evalf(g@f)(x),x=0);
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin\left(\frac{1}{|x^2 - 2|}\right) = \frac{1}{6} \pi$$

Bases de MatemáticasInformática de Sistemas y de Gestión. Febrero 2000.Soluciones del examen M.

1)

&gt; restart; argument(sqrt(5)+I\*sqrt(5));

$$\frac{1}{4} \pi$$

&gt; evalf(%);

.7853981635

2)

&gt; restart; f:=x-&gt; exp(-5\*x^2);

$$f := x \rightarrow e^{(-5x^2)}$$

&gt; t(x):=taylor(f(x),x=0,5);

$$t(x) := 1 - 5x^2 + \frac{25}{2}x^4 + O(x^5)$$

&gt; p(x):=convert(t(x),polynom);

$$p(x) := 1 - 5x^2 + \frac{25}{2}x^4$$

3)

&gt; restart;

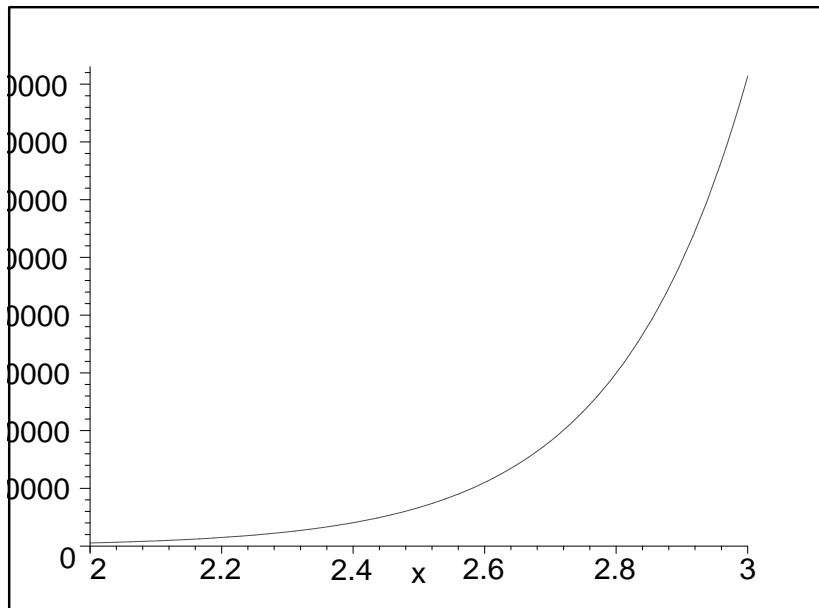
&gt; f:=x-&gt;exp(5\*x-3)+1;

$$f := x \rightarrow e^{(5x-3)} + 1$$

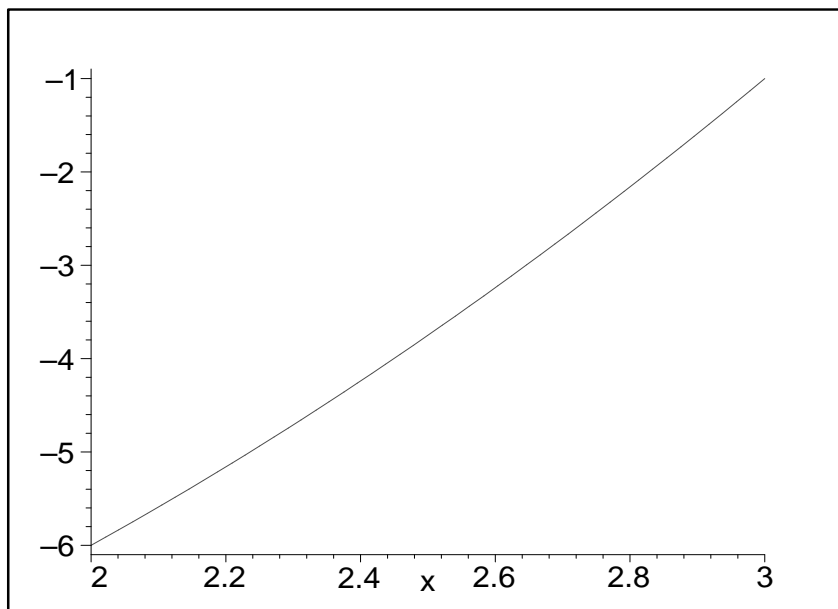
&gt; g:=x-&gt;x^2-10;

$$g := x \rightarrow x^2 - 10$$

&gt; plot(f(x),x=2..3);



```
> plot({g(x)},x=2..3);
```



```
> Area=abs(int(g(x)-f(x),x=2..3));
```

$$Area = \frac{14}{3} + \frac{1}{5} e^{12} - \frac{1}{5} e^7$$

> evalf(%);

$$Area = 32336.29832$$

4)

> restart; Diff(1/(sqrt(5\*x^2+1)),x\$3)=simplify(diff(1/(sqrt(5\*x^2+1)),x\$3));

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{1}{\sqrt{5x^2+1}} = -75 \frac{x(10x^2-3)}{(5x^2+1)^{(7/2)}}$$

> subs(x=2,diff(1/(sqrt(5\*x^2+1)),x\$3));

$$-\frac{1850}{64827} \sqrt{21}$$

> evalf(%);

$$-.1307752176$$

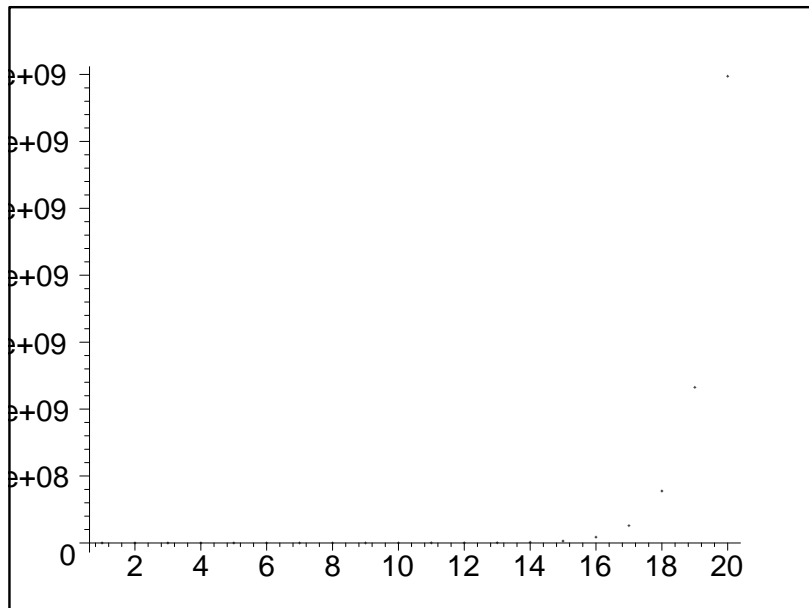
5)

> restart;a:=n->((3^(n^2)-(2^n))^(1/n));

$$a := n \rightarrow (3^{(n^2)} - 2^n)^{\frac{1}{n}}$$

> n:='n':

> plot([seq([n,a(n)],n=1..20)],style=point);



> Limit(a(n),n=infinity)=limit(a(n),n=infinity);

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (3^{(n^2)} - 2^n)^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \infty$$

6)

> restart;

> g:=x->4\*exp(x^2)+2\*x;f:=x->sqrt((2\*x^2+7))+3\*x^2;

$$g := x \rightarrow 4e^{(x^2)} + 2x$$

$$f := x \rightarrow \sqrt{2x^2 + 7} + 3x^2$$

> Limit((g@f)(x),x=0)=limit((g@f)(x),x=0);

$$\lim_{x \rightarrow 0} 4e^{((\sqrt{2x^2+7}+3x^2)^2)} + 2\sqrt{2x^2+7} + 6x^2 = 4e^7 + 2\sqrt{7}$$

Bases de MatemáticasInformática de Sistemas y de Gestión. Febrero 2000.Soluciones del examen N.

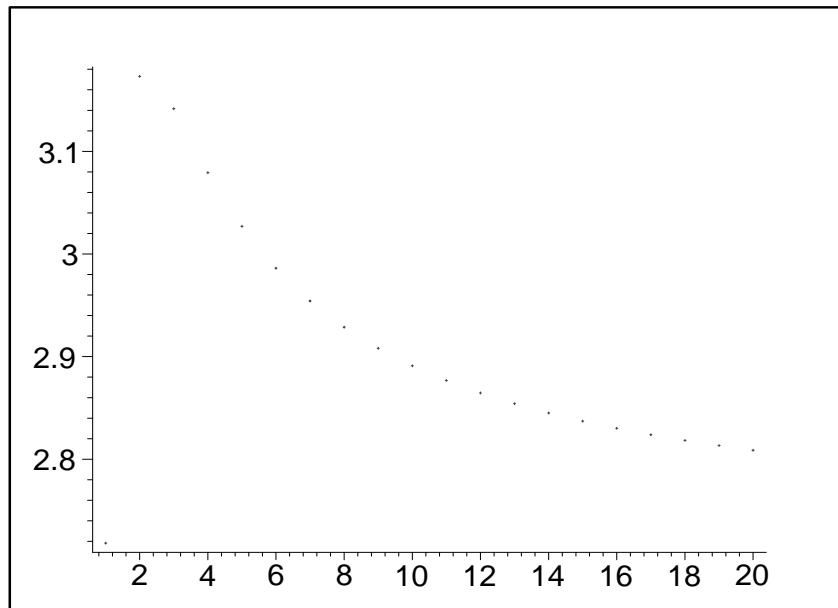
1)

```
> restart;a:=n->exp(((2*n)/(n+1))^(1/n));
```

$$a := n \rightarrow e^{\left(\left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}\right)}$$

```
> n:='n':
```

```
> plot([seq([n,a(n)],n=1..20)],style=point);
```



```
> Limit(a(n),n=infinity)=limit(a(n),n=infinity);
```

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\left(\left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}\right)} = e$$

2)

```
> restart;
```

```
> f:=x->sqrt((3*x+2)^2);g:=x->x^3-5;
```

$$f := x \rightarrow \sqrt{(3x+2)^2}$$

$$g := x \rightarrow x^3 - 5$$

> Limit((f@g)(x),x=0)=limit((f@g)(x),x=0);

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{(3x^3 - 13)^2} = 13$$

3)

> restart;Diff(exp((x+1)^2),x\$3)=simplify(diff(exp((x+1)^2),x\$3));

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} e^{((x+1)^2)} = 36 e^{((x+1)^2)} x + 20 e^{((x+1)^2)} + 8 e^{((x+1)^2)} x^3 + 24 e^{((x+1)^2)} x^2$$

> subs(x=0,diff(exp((x+1)^2),x\$3));

$$20 e$$

> evalf(%);

$$54.36563656$$

4)

> restart;

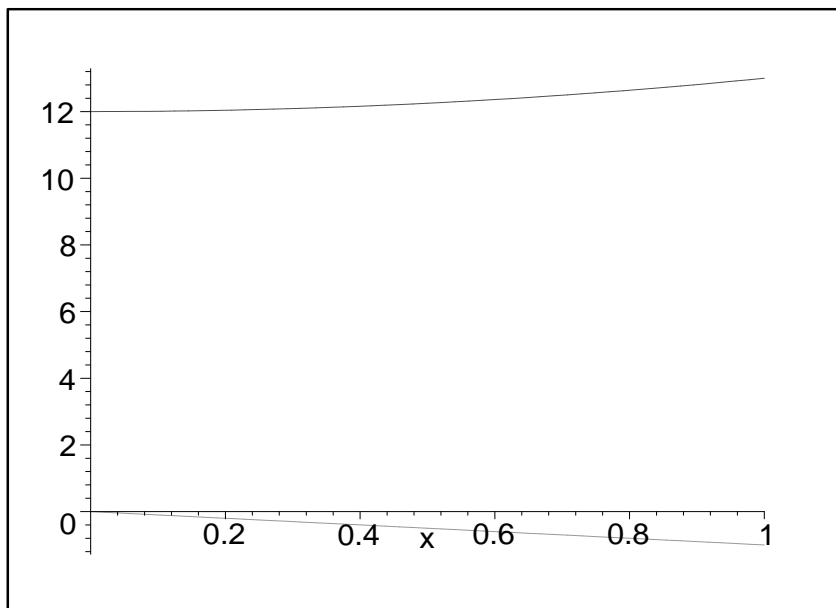
> f:=x->x^2+12;

$$f := x \rightarrow x^2 + 12$$

> g:=x->-x;

$$g := x \rightarrow -x$$

> plot({f(x),g(x)},x=0..1);



```
> Area=abs(int(g(x)-f(x),x=0..1));
```

$$Area = \frac{77}{6}$$

```
> evalf(%);
```

$$Area = 12.83333333$$

5)

```
> restart;f:=x-> exp(x^3-2*x^2+1);
```

$$f := x \rightarrow e^{(x^3-2x^2+1)}$$

```
> t(x):=taylor(f(x),x=0,5);
```

$$t(x) := e - 2ex^2 + ex^3 + 2ex^4 + O(x^5)$$

```
> p(x):=convert(t(x),polynom);
```

$$p(x) := e - 2ex^2 + ex^3 + 2ex^4$$

6)

```
> restart;solve(5*abs(z)^2 = 3*abs(z)+1);
```

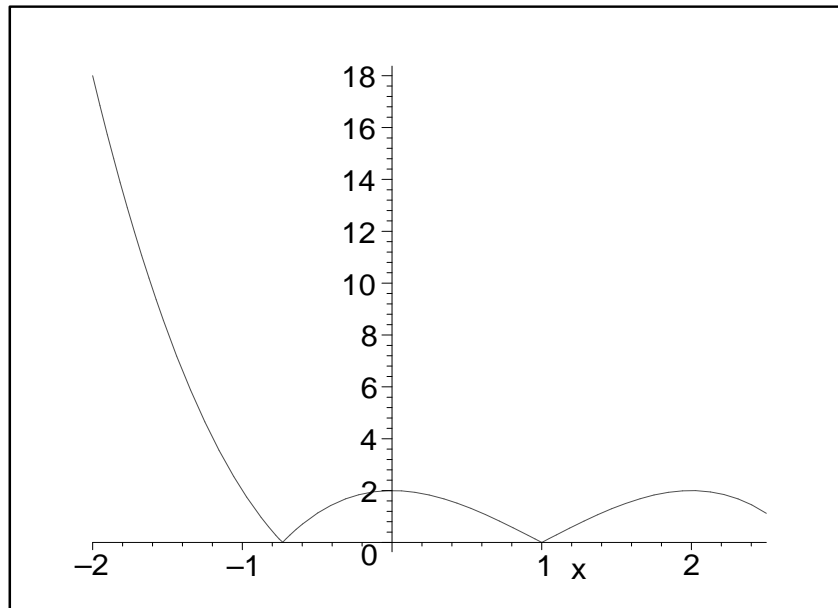
$$\frac{3}{10} - \frac{1}{10}\sqrt{29}, -\frac{3}{10} + \frac{1}{10}\sqrt{29}, \frac{3}{10} + \frac{1}{10}\sqrt{29}, -\frac{3}{10} - \frac{1}{10}\sqrt{29}$$

# Capítulo 13

## Soluciones de los exámenes (2000-2001)

Bases de MatemáticasInformática de Sistemas y de Gestión. Febrero 2001.Soluciones del examen A.

1) Basta pintar la gráfica

> `plot(abs(x^3-3*x^2+2),x=-2..2.5);`

y determinar los 4 puntos críticos:

la función tiene derivada igual a 0 en

```
> solve(diff(x^3-3*x^2+2,x));
 0, 2
```

y no es derivable en

```
> solve(x^3-3*x^2+2);
 1, 1 + sqrt(3), 1 - sqrt(3)
```

```
> evalf(1+sqrt(3));
 2.732050808
```

Los puntos críticos en  $[-2,2.5]$  son  $1 - \sqrt{3}, 0, 1$  y  $2$ .

2) En cualquier punto distinto de 0 la función es continua por las propiedades de las funciones continuas, y también en el 0:

```
> limit(2*x^2+3*x+1,x=0,left);
1
```

```
> limit(x*sin(3/x)+(1+2/x)^(3*x),x=0,right);
1
```

```
> subs(x=0,2*x^2+3*x+1);
1
```

3) Es una sencilla cuenta de números complejos:

```
> Im(evalc(evalc((evalc(sqrt(3+2*I)))/(1-3*I))));

$$\frac{3}{20} \sqrt{6 + 2\sqrt{13}} + \frac{1}{20} \sqrt{-6 + 2\sqrt{13}}$$

```

```
> evalf(%);
.6002312586
```

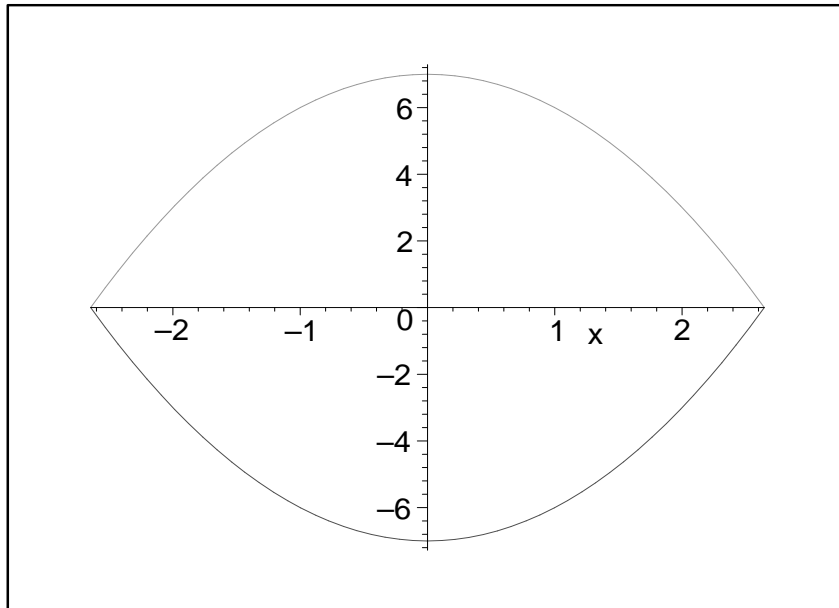
4) Los puntos de corte son:

```
> solve(-x^2+7=x^2-7,x);

$$\sqrt{7}, -\sqrt{7}$$

```

```
> plot({-x^2+7,x^2-7},x=-sqrt(7)..sqrt(7));
```



```
> Area:=2*int(-x^2+7,x=-sqrt(7)..sqrt(7));
```

$$Area := \frac{56}{3} \sqrt{7}$$

```
> evalf(%);
```

```
49.38735781
```

5) Es una cuenta:

```
> evalf(subs(x=3.5,diff(ln((3*x^2+1)/(x^4+2)),x$11)));
```

```
88.38941
```

```
> #fin
```

Bases de MatemáticasInformática de Sistemas y de Gestión. Febrero 2001.Soluciones del examen B.

1)

&gt; a:=n-&gt;(-1)^n\*(1+5/n)^n;

$$a := n \rightarrow (-1)^n \left(1 + 5 \frac{1}{n}\right)^n$$

&gt; limit(a(n),n=infinity);

$$-e^5..e^5$$

&gt; seq(a(2\*n),n=1..10);

$\frac{49}{4}$ ,  $\frac{6561}{256}$ ,  $\frac{1771561}{46656}$ ,  $\frac{815730721}{16777216}$ ,  $\frac{59049}{1024}$ ,  $\frac{582622237229761}{8916100448256}$ ,  $\frac{799006685782884121}{11112006825558016}$ ,  
 $\frac{1430568690241985328321}{18446744073709551616}$ ,  $\frac{3244150909895248285300369}{39346408075296537575424}$ ,  $\frac{95367431640625}{1099511627776}$

&gt; evalf(%);

12.25000000, 25.62890625, 37.97070045, 48.62133986, 57.66503906, 65.34496113,  
71.90480516, 77.55128409, 82.45100553, 86.73617380

&gt; seq(a(2\*n-1),n=1..10);

$-6$ ,  $\frac{-512}{27}$ ,  $-32$ ,  $\frac{-35831808}{823543}$ ,  $\frac{-20661046784}{387420489}$ ,  $\frac{-17592186044416}{285311670611}$ ,  $\frac{-20822964865671168}{302875106592253}$ ,  
 $\frac{-1073741824}{14348907}$ ,  $\frac{-66249952919459433152512}{827240261886336764177}$ ,  $\frac{-167499529910025153071284224}{1978419655660313589123979}$

&gt; evalf(%);

-6., -18.96296296, -32., -43.50933467, -53.32977313, -61.65953887, -68.75099476,  
-74.83091388, -80.08550354, -84.66329650

Entonces la sucesión de los términos pares tiende a  $e^5$ , la de los imparesa -  $e^5$  y  $\{a_n\}$  diverge.

2) Es una cuenta de complejos:

&gt; readlib(polar): evalc((1-7\*I)/(2+6\*I));

$$-1 - \frac{1}{2}I$$

&gt; polar(%);

$$\text{polar}\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}, \arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \pi\right)$$

> evalf(%);

$$\text{polar}(1.118033989, -2.677945045)$$

3) Es una cuenta:

> subs(x=1,diff(arctan(3\*x^3-1),x\$7));

$$\frac{-32906313504}{15625}$$

> evalf(%);

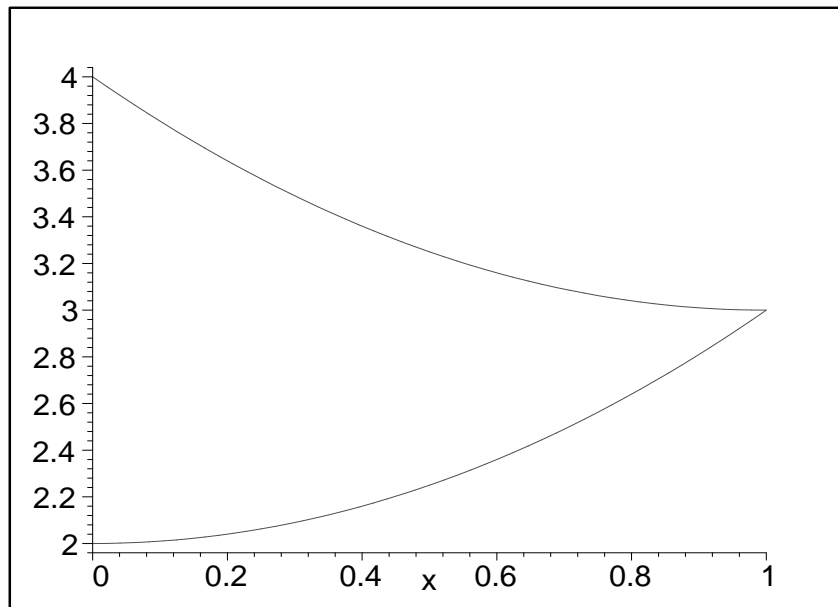
$$-.2106004064 \cdot 10^7$$

4)

> with(plots):plot1:=plot(x^2-2\*x+4,x=0..1):

> plot2:=plot(x^2+2,x=0..1):

> plots[display]({plot1,plot2});



> Volumen:=int(Pi\*(x^2-2\*x+4)^2,x=0..1)-int(Pi\*(x^2+2)^2,x=0..1);

$$\text{Volumen} := \frac{17}{3} \pi$$

5)

```
> taylor(x^4-2*x+7,x=1,5);
```

$$6 + 2(x - 1) + 6(x - 1)^2 + 4(x - 1)^3 + (x - 1)^4$$

```
> subs(x=2,%);
```

19

```
> #fin
```

Bases de MatemáticasInformática de Sistemas y de Gestión. Febrero 2001.Soluciones del examen C.

1)

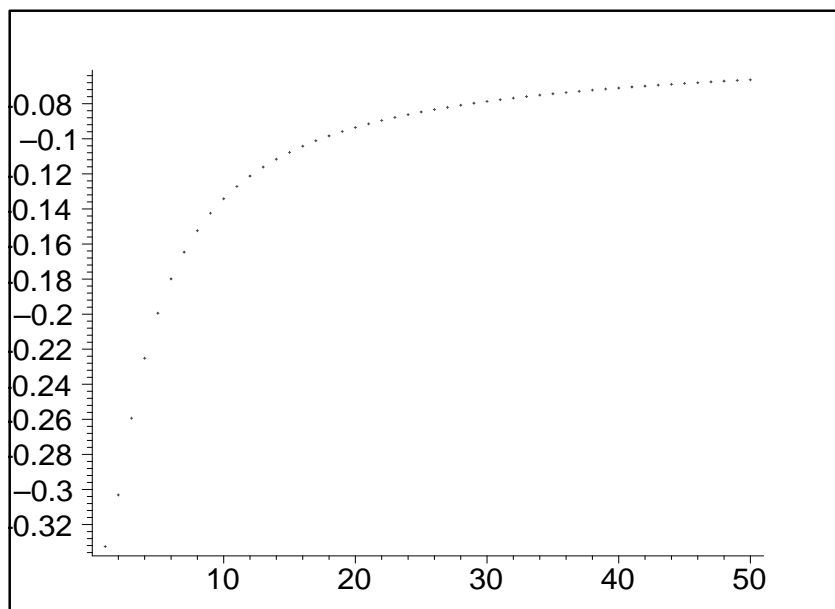
&gt; restart;

&gt; a:=n-&gt;int(cos(3\*x-Pi),x=0..n/(n+1));

$$a := n \rightarrow \int_0^{\frac{n}{n+1}} \cos(3x - \pi) dx$$

&gt; n:='n':

&gt; plot([seq([n,a(n)],n=1..50)],style=point);



&gt; Limit(a(n),n=infinity)=limit(a(n),n=infinity);

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{3} \sin\left(3 \frac{n}{n+1}\right) = -\frac{1}{3} \sin(3)$$

La sucesión converge a  $-\frac{1 \operatorname{sen}(3)}{3}$ .

2)

```
> restart;
```

```
> z:=1/(1-6*I)^3;
```

$$z := -\frac{107}{50653} - \frac{198}{50653} I$$

```
> Im(z);evalf(%);
```

$$\frac{-198}{50653}$$

$$-.003908949124$$

3)

```
> restart;
```

```
> f1:=x->3*x^3-5*x;
```

$$f1 := x \rightarrow 3x^3 - 5x$$

```
> limit((f1(x)-f1(1))/(x-1),x=1,right);
```

$$4$$

```
> f2:=x->x^4-3;
```

$$f2 := x \rightarrow x^4 - 3$$

```
> limit((f2(x)-f1(1))/(x-1),x=1,left);
```

$$4$$

La función es derivable en

```
\mapleinline{inert}{2d}{x = 1;}{%
```

```
$x=1$%
```

```
} y su derivada es igual a 4.
```

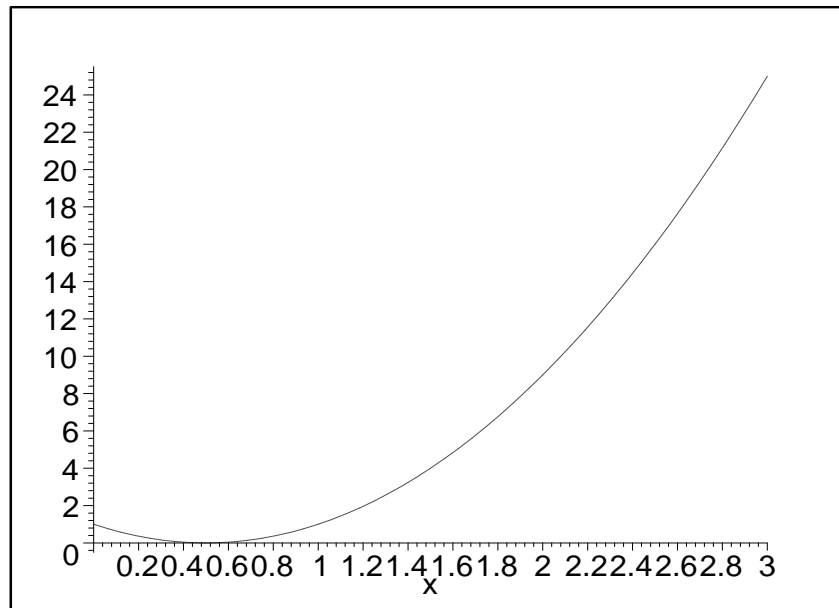
4)

```
> restart;
```

```
> f:=x->(2*x-1)^2;
```

$$f := x \rightarrow (2x - 1)^2$$

```
> plot(f(x),x=0..3);
```



```
> Volumen := Int(2*Pi*x*f(x), x = 0..3) = int(2*Pi*x*f(x), x = 0..3);
```

$$Volumen := \int_0^3 2\pi x (2x - 1)^2 dx = 99\pi$$

El volumen es igual a

```
\mapleinline{inert}{2d}{99*Pi;}{%
```

```
$99\,\pi$%
```

```
}.
```

```
5)
```

```
> restart;
```

La derivada de la función  $y(x)$  definida implícitamente por la ecuación

$$x^2 y(x)^2 = (y(x) - 3)^2 (1 - y(x))$$

es igual a

```
> expr1 := x^(2)*y(x)^(2) = (y(x) - 3)^2*(1 - y(x));
```

$$expr1 := x^2 y(x)^2 = (y(x) - 3)^2 (1 - y(x))$$

```
> diff(x^(2)*y(x)^(2) = (y(x) - 3)^2*(1 - y(x)), x);
```

$$2xy(x)^2 + 2x^2 y(x) \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right) = 2(y(x) - 3)(1 - y(x)) \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right) - (y(x) - 3)^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right)$$

Para despejar la expresión  $\frac{\partial}{\partial x} y$  se utiliza el comando **isolate**:

```
> readlib(isolate):simplify(isolate(diff(x^(2)*y(x)^(2)=(y(x)-3)^2*(1-y
> (x)),x),diff(y(x),x)));
```

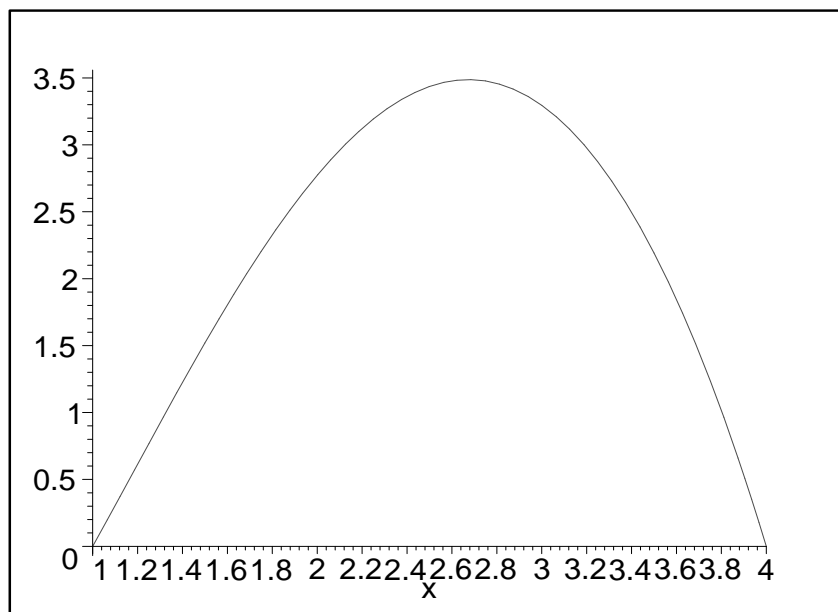
$$\frac{\partial}{\partial x} y(x) = -2 \frac{x y(x)^2}{2 x^2 y(x) - 14 y(x) + 3 y(x)^2 + 15}$$

```
> #fin.
```

Bases de MatemáticasInformática de Sistemas y de Gestión. Febrero 2001.Soluciones del examen D.

1)

```
> restart;plot((-x^2+4*x)*ln(x),x=1..4);
```



```
> solve(diff((-x^2+4*x)*ln(x),x),x);
```

$$e^{\text{RootOf}(2\_Z e^{-Z} - 4\_Z + e^{-Z} - 4)}$$

```
> evalf(%);
```

2.674040404

Hay un máximo en el 2.674040404 y mínimo en el 1 y en el 4.

2)

```
> int(2*x^2+3*x+5,x=-2..0)+ int((7/5)^(3*x),x=0..2);
```

$$\frac{28}{3} - \frac{34008}{15625} \frac{1}{-\ln(7) + \ln(5)}$$

```
> evalf(%);
```

15.80195618

3) Es una cuenta con complejos:

> readlib(polar):

> z:=evalc((3+2\*I)^2/(1-3\*I));

$$z := -\frac{31}{10} + \frac{27}{10} I$$

> polar(z);

$$\text{polar}\left(\frac{13}{10} \sqrt{10}, -\arctan\left(\frac{27}{31}\right) + \pi\right)$$

Entonces la forma trigonométrica es  $\frac{13\sqrt{10}}{10} (\cos(-\arctg(\frac{27}{31}) + \pi) + i \text{sen}(-\arctg(\frac{27}{31}) + \pi))$ .

4)

> x^4-7\*x^3+2\*x^2+7;

$$x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 7$$

> diff(%,x\$2);

$$12x^2 - 42x + 4$$

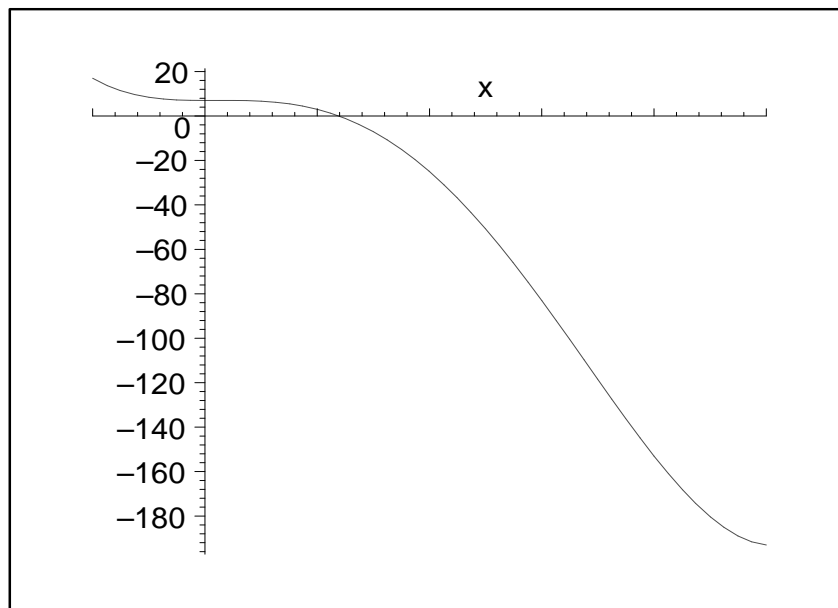
> solve(12\*x^2-42\*x+4);

$$\frac{7}{4} + \frac{1}{12} \sqrt{393}, \frac{7}{4} - \frac{1}{12} \sqrt{393}$$

> evalf(%);

$$3.402018967, .097981033$$

> plot(x^4-7\*x^3+2\*x^2+7,x=-1..5);



La función es convexa en  $(-\infty, .097981033)$  y en  $(3.402018967, \infty)$ . Es cóncava en  $(.097981033, 3.402018967)$ .

5)

```
> a:=n->((n+3)/n)^(2*n);
```

$$a := n \rightarrow \left(\frac{n+3}{n}\right)^{(2n)}$$

```
> limit(a(n),n=infinity);
```

$$e^6$$

```
> evalf(exp(6))-evalf(subs(n=2000,a(n)));
```

$$1.8095457$$

El error es 1.8095457.

```
> #fin
```

Bases de Matemáticas

Informática de Sistemas y de Gestión. Febrero 2001.

Soluciones del examen E.

1) En cualquier punto distinto de 0 la función es continua por las propiedades de las funciones continuas, y en el 0:

$$> \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x^2 + 3x + 2);$$

2

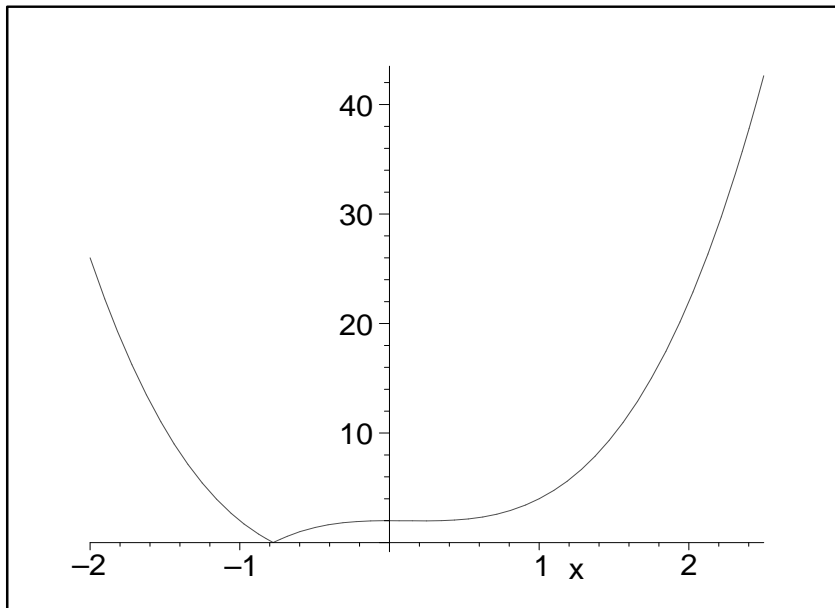
$$> \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cos(3/x) + (1 + 5/x)^{4x});$$

1

Luego en 0 no es continua.

2) Pintamos la gráfica:

$$> \text{plot}(\text{abs}(3x^3 - x^2 + 2), x = -2..2.5);$$



y determinamos quiénes son los 3 puntos críticos:  
la función tiene derivada igual a 0 en

```
> solve(diff(3*x^3-x^2+2,x));
 0, $\frac{2}{9}$
```

y no es derivable en

```
> evalf(solve(3*x^3-x^2+2));
- .7754198714, .5543766025 - .7432468300 I, .5543766025 + .7432468300 I
```

```
Los puntos críticos en [-2,2.5] son
\mapleinline{inert}{2d}{-.7754198714;}{%
$ - .7754198714$%
},
\mapleinline{inert}{2d}{0;}{%
0%
} y
\mapleinline{inert}{2d}{2/9;}{%
$\frac {2}{9}$%
} .
```

3) Es una sencilla cuenta de números complejos

```
> Re(evalc(evalc((evalc(sqrt(5-2*I)))/(1+3*I))));
 $\frac{1}{20} \sqrt{10 + 2\sqrt{29}} - \frac{3}{20} \sqrt{-10 + 2\sqrt{29}}$
```

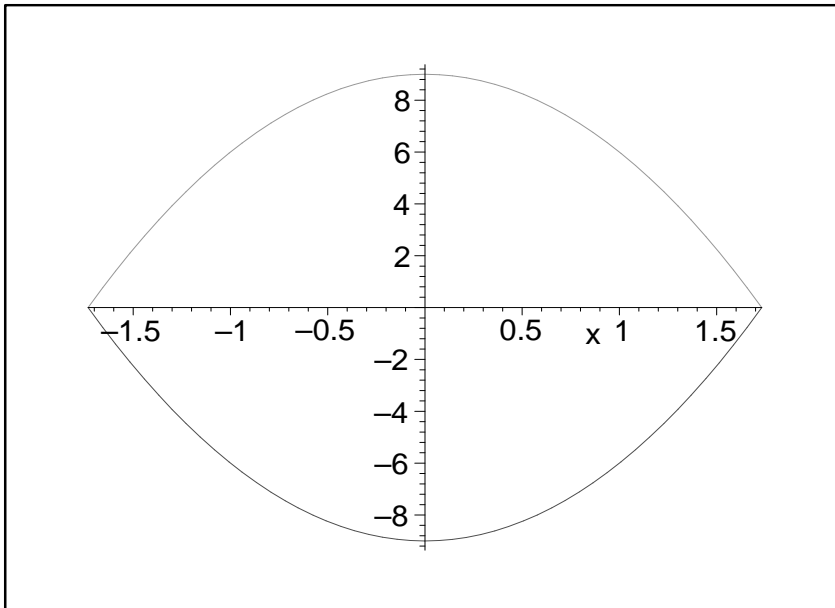
4) Es una cuenta

```
> evalf(subs(x=3.5,diff(arctan((3*x^2+1)/(x^4+2)),x$10)));
-32.62023540
```

5) Los puntos de corte son:

```
> solve(-3*x^2+9=3*x^2-9,x);
 $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$
```

```
> plot({-3*x^2+9,3*x^2-9},x=-sqrt(3)..sqrt(3));
```



```
> Area:=2*int(-3*x^2+9,x=-sqrt(3)..sqrt(3));
Area := 24√3
> evalf(%);
41.56921939
> #fin
```

Bases de MatemáticasInformática de Sistemas y de Gestión. Febrero 2001.Soluciones del examen F.

1) Es una cuenta de complejos:

&gt; readlib(polar): evalc((1+7\*I)/(2+6\*I)^2);

$$\frac{17}{200} - \frac{31}{200} I$$

&gt; polar(%);

$$\text{polar}\left(\frac{1}{8}\sqrt{2}, -\arctan\left(\frac{31}{17}\right)\right)$$

&gt; evalf(%);

$$\text{polar}(.1767766953, -1.069192273)$$

2)

&gt; a:=n-&gt;(-1)^(n+1)\*(1+2/n)^(3\*n);

$$a := n \rightarrow (-1)^{(n+1)} \left(1 + 2\frac{1}{n}\right)^{(3n)}$$

&gt; limit(a(n),n=infinity);

$$-e^6..e^6$$

&gt; evalf(seq(a(2\*n),n=1..10));

-64., -129.7463379, -177.3769811, -211.7582368, -237.3763138, -257.0895515,  
-272.6853292, -285.3126828, -295.7362014, -304.4816395

&gt; evalf(seq(a(2\*n-1),n=1..10));

27., 99.22903013, 155.5680956, 195.8997392, 225.4523385, 247.8403512, 265.3190070,  
279.3153507, 290.7626768, 300.2925415

Entonces la sucesión de los términos pares tiende a  $-e^6$ , la de los impares a  $e^6$  y  $\{a_n\}$  diverge.

3) Es una cuenta:

&gt; evalf(subs(x=2,diff(cos(3\*x^3-exp(1)^x),x\$15)));

$$.1703144531 10^{23}$$

4)

&gt; taylor(x^4-3\*x+5,x=2,5);

```

15 + 29(x - 2) + 24(x - 2)^2 + 8(x - 2)^3 + (x - 2)^4
> subs(x=3,%);

```

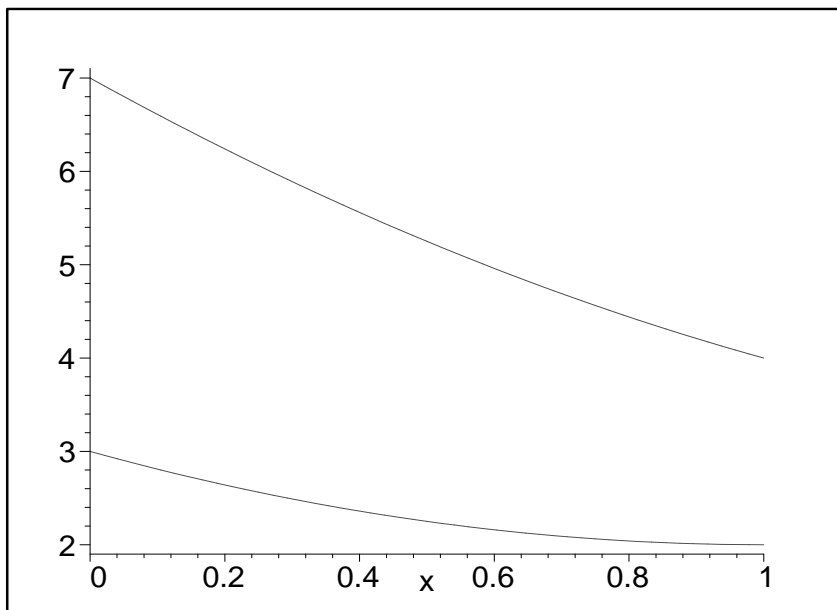
77

5)

```

> with(plots):plot1:=plot((x-1)^2-2*(x-1)+4,x=0..1):
> plot2:=plot((x-1)^2+2,x=0..1):
> plots[display]({plot1,plot2});

```



```

> Volumen:=int(Pi*((x-1)^2-2*(x-1)+4)^2,x=0..1)-int(Pi*((x-1)^2+2)^2,x=
> 0..1);

```

$$Volumen := \frac{71}{3} \pi$$

```

> #fin

```

Bases de MatemáticasInformática de Sistemas y de Gestión. Febrero 2001.Soluciones del examen G.

1)

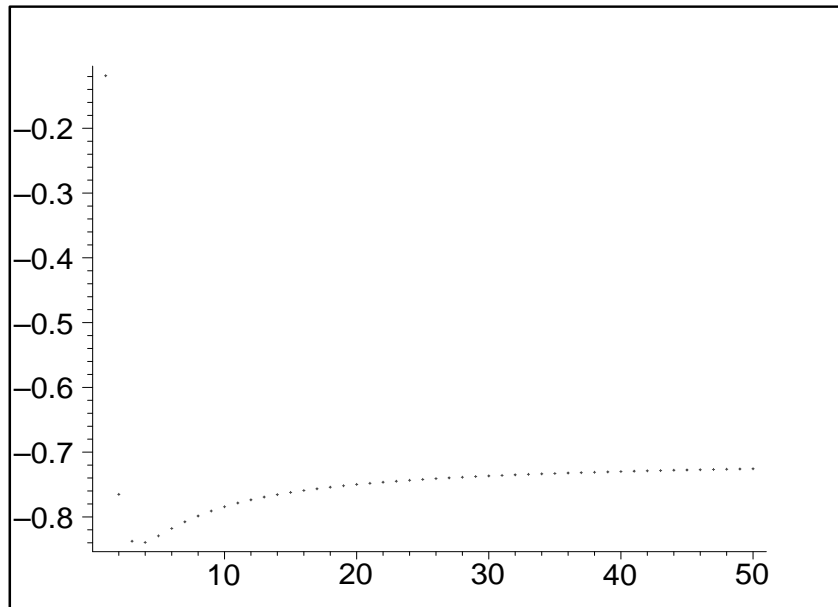
&gt; restart;

&gt; a:=n-&gt;int(sin(Pi+2\*x),x=-1/n..(n+1)/n);

$$a := n \rightarrow \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{n+1}{n}} \sin(\pi + 2x) dx$$

&gt; n:='n':

&gt; plot([seq([n,a(n)],n=1..50)],style=point);



&gt; Limit(a(n),n=infinity)=limit(a(n),n=infinity);

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cos\left(2 \frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(2 \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \cos(2) - \frac{1}{2}$$

&gt; evalf(%);

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cos\left(2 \frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(2 \frac{1}{n}\right) = -.7080734183$$

La sucesión converge a  $\frac{\cos(2)}{2} - \frac{1}{2}$ .

2)

> restart;

> z:=1/(1-6\*I)^3;

$$z := -\frac{107}{50653} - \frac{198}{50653} I$$

> argument(z);

$$\arctan\left(\frac{198}{107}\right) - \pi$$

> evalf(%);

$$-2.066242359$$

El argumento es

```
\mapleinline{inert}{2d}{arctan(198/107)-Pi;}{%
 $\mathrm{arctan}\left(\frac{198}{107}\right) - \pi$
}
```

3)

> restart;

> f1:=x->x^3+x;

$$f1 := x \rightarrow x^3 + x$$

> limit((f1(x)-f1(2))/(x-2),x=2,right);

$$13$$

> f2:=x->13\*x-16;

$$f2 := x \rightarrow 13x - 16$$

> limit((f2(x)-f1(2))/(x-2),x=2,left);

$$13$$

La función es derivable en

```
\mapleinline{inert}{2d}{x = 2;}{%
 $x=2$
}
```

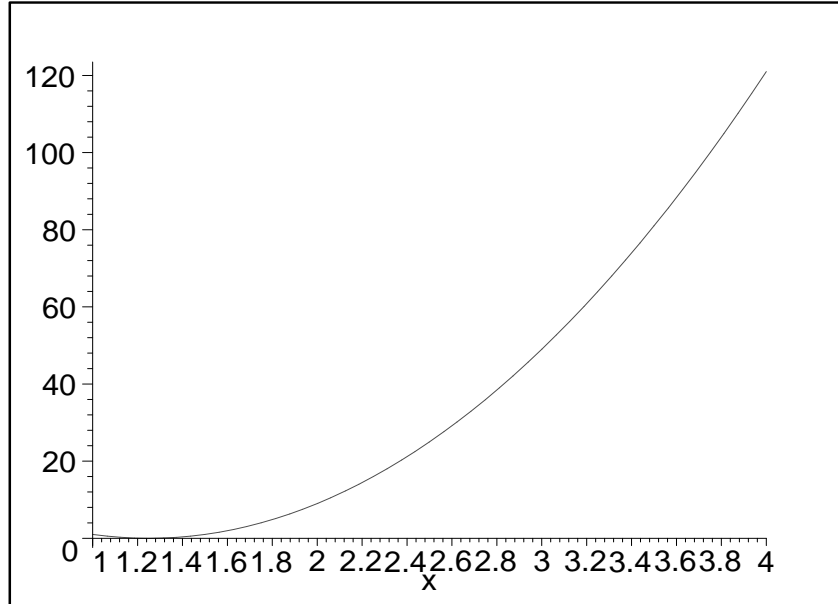
y su derivada es igual a 13.

4)

> restart;f:=x->(4\*x-5)^2;

$$f := x \rightarrow (4x - 5)^2$$

```
> plot(f(x), x=1..4);
```



```
> Volumen := Int(2*Pi*x*f(x), x = 1..4) = int(2*Pi*x*f(x), x = 1..4);
```

$$\text{Volumen} := \int_1^4 2\pi x (4x - 5)^2 dx = 735\pi$$

El volumen es igual a

```
\mapleinline{inert}{2d}{735*Pi;}{%
$735\,\pi $%
}.
```

5)

```
> restart;
```

La derivada de la función  $y(x)$  definida implícitamente por la ecuación

$$x^3 + y(x)^2 = (2y(x) - 1)y(x)^4$$

es igual a

```
> expr1 := x^3 + y(x)^2 = (2*y(x)-1)*y(x)^4;
```

$$\text{expr1} := x^3 + y(x)^2 = (2y(x) - 1)y(x)^4$$

```
> diff(x^3+y(x)^2 = (2*y(x)-1)*y(x)^4, x);
```

$$3x^2 + 2y(x) \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right) = 2 \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right) y(x)^4 + 4(2y(x) - 1)y(x)^3 \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right)$$

Para despejar la expresión  $\frac{\partial}{\partial x} y$  se utiliza el comando **isolate**:

```
> readlib(isolate):simplify(isolate(diff(x^3+y(x)^2
> =
> (2*y(x)-1)*y(x)^4,x),diff(y(x),x)));
```

$$\frac{\partial}{\partial x} y(x) = \frac{3}{2} \frac{x^2}{y(x)(-1 + 5y(x)^3 - 2y(x)^2)}$$

```
> #fin
```

Bases de MatemáticasInformática de Sistemas y de Gestión. Febrero 2001.Soluciones del examen H.

1)

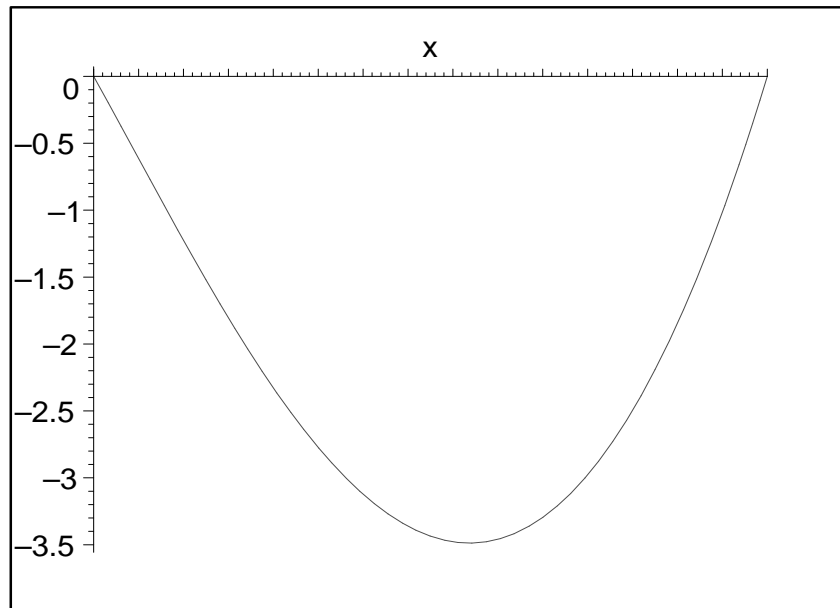
> `int(x^2+3*x+5,x=-2..0)+ int((7/5)^(3*x),x=0..2);`

$$\frac{20}{3} + \frac{34008}{15625} \frac{1}{\ln(7) - \ln(5)}$$

> `evalf(%);`

13.13528952

2)

> `plot((x^2-4*x)*ln(x),x=1..4);`> `solve(diff((x^2-4*x)*ln(x),x),x);`

$$e^{\text{RootOf}(2\_Z e^{-Z} - 4\_Z + e^{-Z} - 4)}$$

> `evalf(%);`

2.674040404

Hay un mínimo en el 2.674040404 y un máximo en el 1 y en el 4 .

3) Es una cuenta con complejos:

> readlib(polar):

> z:=evalc((3-2\*I)/(1-3\*I)^2);

$$z := -\frac{3}{25} + \frac{17}{50}I$$

> polar(z);

$$\text{polar}\left(\frac{1}{10}\sqrt{13}, -\arctan\left(\frac{17}{6}\right) + \pi\right)$$

Entonces la forma trigonométrica es  $\frac{\sqrt{13}}{10} (\cos(-\arctan(\frac{17}{6}) + \pi) + i \sin(-\arctan(\frac{17}{6}) + \pi))$ .

4)

> a:=n->((n+5)/n)^(4\*n);

$$a := n \rightarrow \left(\frac{n+5}{n}\right)^{(4n)}$$

> limit(a(n),n=infinity);

$$e^{20}$$

> evalf(exp(20))-evalf(subs(n=1000,a(n)));

$$.235851495 \cdot 10^8$$

El error es  $.235851495 \cdot 10^8$ .

5)

> x^4-7\*x^3+2\*x^2+7;

$$x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 7$$

> diff(%,x\$2);

$$12x^2 - 42x + 4$$

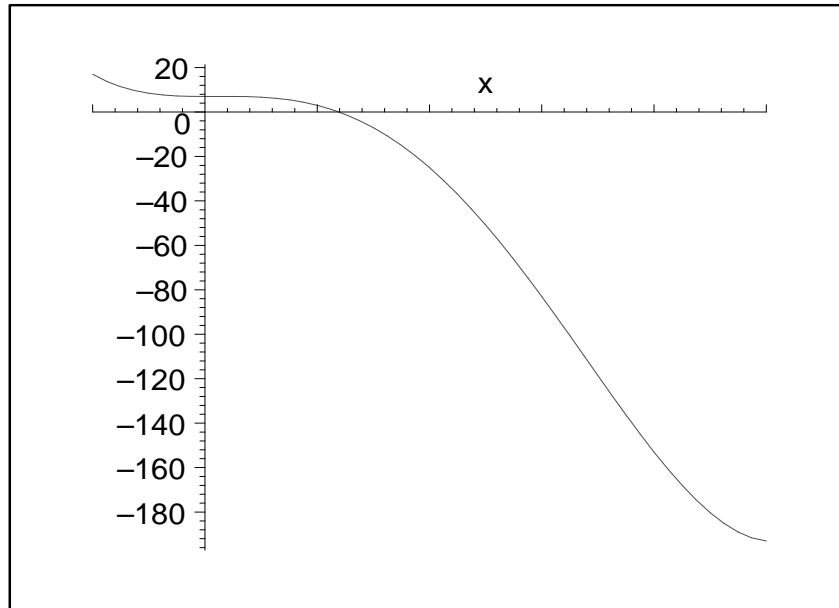
> solve(12\*x^2-42\*x+4);

$$\frac{7}{4} + \frac{1}{12}\sqrt{393}, \frac{7}{4} - \frac{1}{12}\sqrt{393}$$

> evalf(%);

$$3.402018967, .097981033$$

> plot(x^4-7\*x^3+2\*x^2+7,x=-1..5);



La función es convexa en  $(-\infty, .097981033)$  y en  $(3.402018967, \infty)$ . Es cóncava en  $(.097981033, 3.402018967)$ .

> #fin

## Capítulo 14

### Soluciones de los exámenes (2001-2002)

Bases de MatemáticasInformática de Sistemas y de Gestión. Febrero 2002.Soluciones del examen A.

1)

```
> restart; limit(((a^(1/n)+b^(1/n))/2)^n,n=infinity);
```

$$\sqrt{a} \sqrt{b}$$

2)

```
> restart; f:=x->abs(4*x^4-3*x^2+x+1);
```

$$f := x \rightarrow |4x^4 - 3x^2 + x + 1|$$

```
> solve(diff(f(x),x));
```

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{3}, -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{3}$$

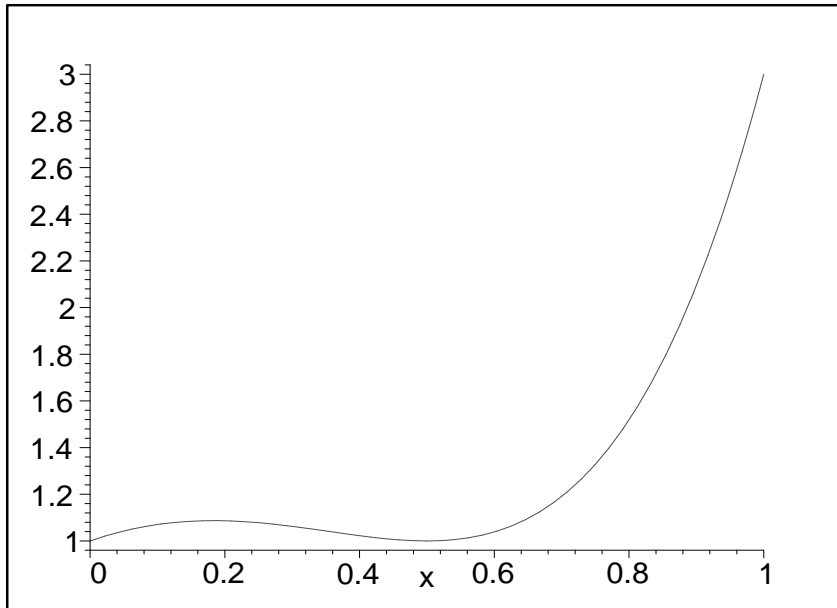
```
> evalf(%);
```

```
.5000000000, .1830127020, -.6830127020
```

```
> evalf(solve(4*x^4-3*x^2+x+1));
```

```
-.5000000000, -.8294835411, .6647417705 - .4011272789 I,
.6647417705 + .4011272789 I
```

```
> plot(f(x),x=0..1);
```



Los puntos críticos son  $\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{4} + \frac{1\sqrt{3}}{4}$ .

3)

```
> restart; limit(exp(1/x), x=0, left);
```

0

```
> limit(exp(1/x), x=0, right);
```

$\infty$

La función no es continua en  $x=0$ .

4)

```
> restart; y:=x->sqrt((1-(x^2)/(a^2))*b^2);
```

$$y := x \rightarrow \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2}$$

```
> V:=simplify(2*int(2*Pi*x*y(x), x=0..a));
```

$$V := \frac{4}{3} \operatorname{csgn}(b) b \pi a^2$$

5)

```
> restart; f:=x->ln(exp(x)*cos(x));
```

$$f := x \rightarrow \ln(e^x \cos(x))$$

> `taylor(f(x), x=0, 8);`

$$x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + O(x^8)$$

El coeficiente es 0.

Bases de Matemáticas

Informática de Sistemas y de Gestión. Febrero 2002.

Soluciones del examen B.

1)

> restart;f:=x->x/ln(x);

$$f := x \rightarrow \frac{x}{\ln(x)}$$

no está definida en x=1.

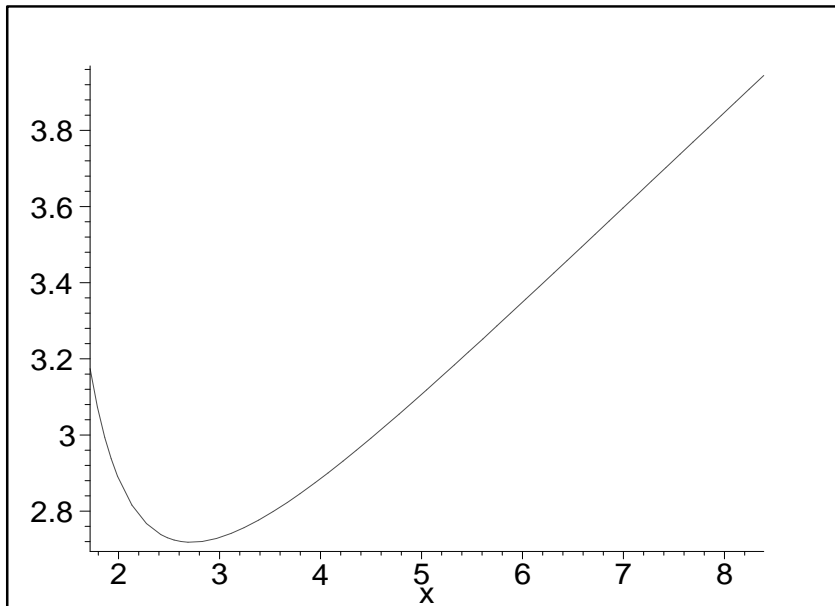
> diff(f(x),x);

$$\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x)^2}$$

> solve(%,x);

*e*

> plot(f(x),x=exp(1)-1..exp(1)^2+1);



> f2:=x->diff(f(x),x\$2);

$$f2 := x \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x)$$

> diff(f(x), x\$2);

$$-\frac{1}{\ln(x)^2 x} + 2 \frac{1}{\ln(x)^3 x}$$

> solve(f2(x), x);

$$e^2$$

no hay puntos de inflexión.

2)

> restart;

> ((n+x)/n)^(-2\*n);

$$\left(\frac{n+x}{n}\right)^{-2n}$$

> f:=x->limit(((n+x)/n)^(-2\*n), n=infinity);

$$f := x \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+x}{n}\right)^{-2n}$$

> diff(f(x), x\$10);

$$1024 e^{(-2x)}$$

3)

> restart;

> f:=x->tan(sin(x))-sin(tan(x));

$$f := x \rightarrow \tan(\sin(x)) - \sin(\tan(x))$$

> taylor(f(x), x=0, 10);

$$\frac{1}{30} x^7 + \frac{29}{756} x^9 + O(x^{11})$$

> convert(%, polynom);

$$\frac{1}{30} x^7 + \frac{29}{756} x^9$$

4)

> restart;

> f:=x->x^2;

$$f := x \rightarrow x^2$$

> g:=x->1/x^2;

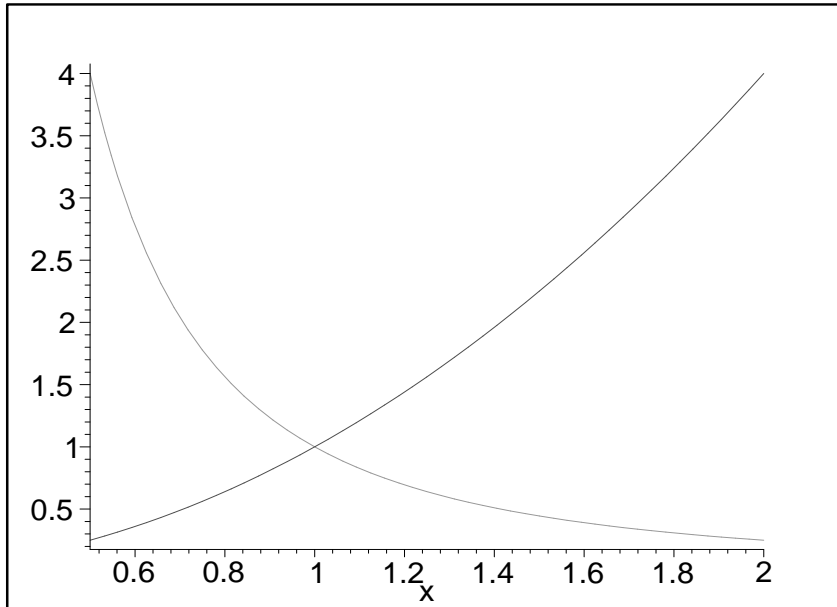
$$g := x \rightarrow \frac{1}{x^2}$$

> solve(f(x)-g(x));

```

1, -1, I, -I
> plot({f(x),g(x)},x=0.5..2);

```



```

> int(f(x),x=0..1)+int(1/x^2,x=1..infinity);

```

$$\frac{4}{3}$$

5)

```

> evalf(solve(x^x-2));

```

1.559610470



# Bibliografía

- [A] T. J. Apostol, *Calculus*, vol. 1. Ed. Reverté, 1998.
- [ABGM] J. Amillo, F. Ballesteros, R. Guadalupe, L. J. Martín, *Cálculo (Conceptos, Ejercicios y Sistemas de Computación Matemática)*. Ed. McGraw-Hill, 1996.
- [B] J. de Burgos Román, *Cálculo Infinitesimal de una Variable*. Ed. McGraw-Hill, 1997.
- [BS] R. G. Bartle y D. R. Sherbert, *Introducción al análisis matemático de una variable*. Ed. Limusa (2ª Edición), 1996.
- [BSm] G. L. Bradley y K. J. Smith, *Cálculo de una variable*, vol. 1. Ed. Prentice Hall, 1999.
- [D] B. P. Demidóvich, *5000 problemas de análisis matemático*. Ed. Paraninfo, 1998.
- [G] J. L. García Valle, *Matemáticas especiales para computación*. Ed. McGraw-Hill, 1988.
- [GG] A. García, F. García, A. Gutiérrez, A. López, G. Rodríguez, A. de la Villa, *Cálculo I*. Ed. CLAGSA, 1993.
- [LHE] R. E. Larson, R. P. Hostetler, B. H. Edwards, *Cálculo y Geometría Analítica*, vol. 1. Ed. McGraw-Hill, 1995.
- [NPS] A. Ñevot, J. M. Poncela y J. Soler, *Apuntes y Problemas de Matemática Superior*. Ed. Taurus Universitaria, 1994.
- [K] M. Krasnov et al., *Curso de matemáticas superiores para ingenieros*, vol. 1. Ed. Mir-Rubiños, 1994.

- [P] D. Pestana, J.M. Rodríguez, E. Romera, E. Touris, V. Álvarez, A. Portilla, *Curso práctico de Cálculo y Precálculo*, Editorial Ariel, 2000,
- [S] J. Stewart, *Calculus*. Ed. Brooks/Cole Publishing Company, 1995.