

## Álgebra (Solución)

Examen septiembre

Fecha: 02 de septiembre del 2008

Hora: De 15:00 a 18:00

APELLIDOS (UTILIZAR MAYÚSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

**Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.**  
*No podéis consultar apuntes y no está permitido el uso de calculadoras.*

**Problema 1 (2,5 pts)** Sea  $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$  una base de un espacio vectorial  $W$ , y sean los vectores  $v_1 = w_1 + w_2$ ,  $v_2 = w_2 + w_3$ ,  $v_3 = w_3 + w_4$  y  $v_4 = w_1 - w_4$ .

a) Probar que los vectores  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  son linealmente independientes.

b) ¿Es  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  una base de  $W$ ? Razona tus respuestas.

**Solución:**

(i) Las coordenadas de los vectores respecto de la base  $B = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$  son:

$$v_1 = (1, 1, 0, 0), \quad v_2 = (0, 1, 1, 0), \quad v_3 = (0, 0, 1, 1), \quad v_4 = (1, 0, 0, -1)$$

Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

entonces  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  son l.i.

(ii)  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  es base porque son 4 vectores l.i. y  $\dim(W) = 4$

**Problema 2 (2,5 pts)** Sea  $B_4 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  la base canónica de  $\mathbb{R}^4$ . Se define la aplicación lineal  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que:  $f(e_1) = (1, 2, 3)$ ,  $f(e_1 + e_2) = (0, 1, 1)$ ,  $f(e_1 + e_2 + e_3) = (2, 0, 1)$  y  $f(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = (2, 1, -1)$ .

a) Hallar la matriz asociada a la aplicación lineal respecto a las bases canónicas de  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}^4$ .

b) Determinar los subespacios  $\text{Ker } f$  e  $\text{Im } f$ . ¿Es  $f$  una aplicación biyectiva?

**Solución:**

a)

$$M_{B_3}^{B_4}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Una Base para  $\text{Im } f$  sería  $\{(1, 2, 3); (-1, -1, -2); (2, -1, 0)\}$  Base  $\text{Ker } f$  sería  $\{(-10, -16, -3, 1)\}$

No es Biyectiva ya que no es Inyectiva ( $\text{Ker } f \neq 0$ ).

**Problema 3 (2,5 pts)** Sea  $G \in M_{5 \times 3}(\mathbb{Z}_2)$  la matriz binaria

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula una matriz decodificadora y una matriz de control de un código lineal  $c$  cuya matriz generadora es  $G$ .

b) En una transmisión se emplea el código  $c$  anterior y se reciben los siguientes mensajes codificados  $v_1 = 11100$ ,  $v_2 = 00101$  y  $v_3 = 01100$ . Detecta si ha habido algún error en la transmisión, decodifica el/los mensaje/s sin errores (si los hay) y, si se puede, trata de corregir los errores que se han podido producir. Justifica tus razonamientos.

**Solución:**

(i)

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$Hv_1 = (0, 1) \quad \text{error}, \quad Hv_2 = (0, 0) \quad \text{correcta}, \quad Hv_3 = (1, 0) \quad \text{error},$$

podemos decodificar  $v_2$  y tenemos

$$Tv_2 = (0, 1, 1)$$

Los síndromes de la base canónica  $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  son:

$$He_1 = (1, 1), \quad He_2 = (0, 0), \quad He_3 = (1, 0), \quad He_4 = (0, 1), \quad He_5 = (1, 0)$$

$Hv_3 = (1, 0)$  no se puede corregir (hay dos iguales) mientras que el  $Hv_1 = (0, 1)$  sí se puede corregir (hay un error en el cuarto bit).

**Problema 4 (2,5 pts)** 1. Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Decidir si  $A$  es diagonalizable sobre  $\mathbb{R}$ .

b) En caso afirmativo, hallar una diagonalización de  $A$  (basta con hallar la matriz diagonal  $D$  y la matriz invertible  $P$  tales que  $A = PDP^{-1}$ ). En caso negativo, hallar bases de los espacios propios correspondientes a los autovalores reales de  $A$ .

**Solución:**

a) En primer lugar hallamos el polinomio característico de la matriz  $A$

$$|A - \lambda I_4| = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 - \lambda & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -2 - \lambda & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (-2 - \lambda)^3 (3 - \lambda)$$

A continuación resolvemos la ecuación característica  $|A - \lambda I_4| = 0$

$$(-2 - \lambda)^3 (3 - \lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (-2 - \lambda)^3 = 0 & \Rightarrow \lambda = -2 \text{ (solución triple)} \\ \text{ó} \\ (3 - \lambda) = 0 & \Rightarrow \lambda = 3 \text{ (solución simple)} \end{cases}$$

De donde se deduce que los autovalores reales de  $A$  y sus correspondientes multiplicidades algebraicas son

$$\begin{array}{ll} \lambda = -2 & \text{con } m_a(-2) = 3 \\ \lambda = 3 & \text{con } m_a(3) = 1 \end{array}$$

Para decidir si  $A$  es diagonalizable, hallamos el rango de  $A + 2 I_4$  con el que podremos calcular la multiplicidad geométrica del autovalor  $\lambda = -2$

$$A + 2 I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

tiene, obviamente, rango 2. De ahí se deduce que

$$m_g(-2) = \text{tamaño}(A) - \text{rango}(A + 2 I_4) = 4 - 2 = 2$$

Por lo tanto  $A$  **no es diagonalizable**, ya que  $m_g(-2) \neq m_a(-2)$ .

b) En primer lugar vamos a hallar una base de  $S_{-2} = \text{Ker}(A + 2 I_4)$ . Sabemos ya, por el apartado anterior, que este espacio propio tiene dimensión  $m_g(-2) = 2$ . Para encontrar los dos vectores que forman base de  $S_{-2}$  resolvemos el sistema de ecuaciones lineales homogéneo

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix}}_{A+2 I_4} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dos soluciones linealmente independientes de este sistema son, por ejemplo,  $(1, 3, 0, 0)$  y  $(0, 0, 1, -1)$ . Por lo tanto el conjunto

$$\{(1, 3, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\}$$

es una base de  $S_{-2}$ .

Hallemos ahora una base de  $S_3 = \text{Ker}(A - 3 I_4)$ , del cual sabemos ya que tiene dimensión  $m_g(3) = 1$ . Resolvemos el sistema

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -5 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}}_{A-3 I_4} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y elegimos una solución no nula, por ejemplo,  $(0, 0, 0, 1)$ . Así pues, el conjunto  $\{(0, 0, 0, 1)\}$

es una base de  $S_3$ .