Álgebra

Examen junio
Fecha: 27 de junio del 2008
Hora: De 09:00 a 12:00

APELLIDOS (UTILIZAR MAYÚSCULAS)	NOMBRE	D.N.I.

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.
No podéis consultar apuntes y no está permitido el uso de calculadoras.
.

Problema 1 (1 pto) Consideremos una aplicación lineal $F : P_5 \longrightarrow V$, donde P_5 es el conjunto de polinomios de grado menor o igual que 5 y V es un espacio vectorial que tiene una base de la forma $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
a) ¿Puede ser F inyectiva? Justifica tu contestación.
b) Si ker F tiene como sistema generador a $\{t^4, t^5\}$, ¿puede ser F sobreyectiva? Razona tus respuestas.
Solución:
a) F no es inyectiva porque aplicando la fórmula de las dimensiones tenemos que:

$$dim(P_5) = 6 = dim(Im(F)) + dim(Ker(F)) \qquad y \qquad dim(Im(F)) \leq 5$$
$$\Rightarrow dim(Ker(F)) \geq 1$$

b) F no es sobreyectiva porque, razonando como en el apartado anterior, tenemos que:

$$dim(P_5) = 6 = dim(Im(F)) + dim(Ker(F)) = dim(Im(F)) + 2$$
$$\Rightarrow dim(Im(F)) = 4 < 5$$

Problema 2 (2 ptos) Calcular las dimensiones de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4 : V_1 = \{(x, y, z, t) \ / \ x + y + z = 0\}, V_2 = L((1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4))$ y
$V_3 = \{(\lambda + \mu, \lambda + \gamma, \gamma + \delta, \lambda + \delta) \ / \ \lambda, \mu, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$.
Pertenece el vector (1,0,1,-2) a dichos subespacios? En caso afirmativo calcular las coordenadas de este vector con respecto a alguna base de dichos subespacios (La elección de la base es arbitraria)
Solución:
dim $V_1 = 3$, dim $V_2 = 2$ y dim $V_3 = 4$. $(1, 0, 1, -2)$ No pertenece a V_1 ni a V_2, Sí pertenece a V_3, sus coordenadas tomando la base canónica son (1,0,1,-2).
Problema 3 (3 ptos) Sea g una aplicación lineal de $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$g(x, y, z, t) = (2x + 2y - z + t, 3x + 4y - \frac{3}{2}z + 2t, 2x + 3y - z - t, x + 4y - \frac{1}{2}z + t)$$

a) Hallar una base de $Im(g)$ y $Ker(g)$.
b) Completar $Im(g)$ a una base B de $\mathbb{R}^4$.
c) Calcular la ecuación implícita de $Im(g)$ respecto de B.

Solución:

a) Realizando las siguientes operaciones sobre las columnas de la matriz $\begin{pmatrix} \mathrm{M}_{B_4}^{B_4}(g) \\ I_4 \end{pmatrix}$

$$c_2 = c_1 - c_2, c_3 = c_1 + 2c_3, c_4 = c_1 - 2c_4 \,; c_4 = c_2 - c_4$$

obtenemos

$$\begin{pmatrix} \mathrm{M}_{B_4}^{B_4}(g) \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -3/2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1/2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

luego se deduce que:
$Base(Ker(g)) = \{(1,0,2,0)\}$ y $Base(Im(g)) = \{(2,3,2,1),(0,-1,-1,-3),(0,0,-1,-2)\}$.

b) Para completar la base de Im(g), añadimos un vector de la base canónica de B_4 de tal forma que la matriz cuyas columnas son dichos vectores sea una matriz gaussiana. Así,

$$B = \{(2,3,2,1),(0,-1,-1,-3),(0,0,-1,-2),(0,0,0,1)\}$$

c) Denotamos por $H = Im(g)$ y $E = \mathbb{R}^4$ y sea $n = dim(E) = 4$ y $r = dim(H) = 3$. Tenemos $H \prec E$ y $0 < r < n < \infty$, entonces aplicando la proposición 3.5.12 del Tema 3, existe una función lineal $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^{n-r}_{B_{n-r}} = \mathbb{R}_{B_1}$ / $Ker(f) = H$. La funcón f está definida por:

$$f(2,3,2,1) = 0, f(0,-1,-1,-3) = 0, f(0,0,-1,-2) = 0, f(0,0,0,1) = 1.$$

Luego la ecuación implícita de $H = Im(g)$ respecto de la base B está definada por:

$$M_{B_1}^{B}(f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (0,0,0,1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow t = 0.$$

Problema 4 (3 ptos) Dado el código $\mathrm{C} \prec \mathrm{Z}_2^5$ formado por las palabras de Z_2^5 que satisfacen las ecuaciones: $\begin{cases} \mathrm{x}_2 + x_4 = 0 \\ \mathrm{x}_3 + x_5 = 0 \end{cases}$

a) Determina la matriz de Control del código C
b) Halla la matriz Generadora del código.
c) ¿Cuántas palabras forman el código?
d) Calcula la distancia mínima de C y el número de errores que podríamos detectar y corregir.

Solución:

a) $\quad \mathrm{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $$\mathrm{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $\mathrm{C} = \{00000; 10000; 01010; 00101; 11010; 10101; 01111; 11111\}$ 8 palabras

d) distancia mínima $= 1$ Detecta y corrige $=$ cero errores.

Problema 5 (1 pto) Si $A \in M_{6\times 6}(\mathbb{R})$ de forma que:
a) $\lambda = 3$ es uno de los valores propios reales de A.
b) $\det(A) = 0$.
c) $A - 3I_6$, tiene rango 1 (es decir, al triangular $A - 3I_6$ obtenemos una matriz que solo tiene una fila distinta de cero).

Calcula las multiplicidades algebraica y geométrica de **todos** los valores propios de A. ¿Es diagonalizable? Razona tus respuestas.

Solución:
Por (a), $\lambda = 3$ es autovalor y sus multiplicidades algebraica y geométrica son:

$$rg(A - 3I) = 1 \Rightarrow dim(Ker(A - 3I)) = 5 \Rightarrow n_1 = 5 = d_1$$

Por (b), $\lambda = 0$ es autovalor y sus multiplicidades algebraica y geométrica son iguales a 1. Por tanto, A es diagonalizable.