2. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) ¿Es diagonalizable? Razona tu respuesta. En caso afirmativo, calcula una matriz inversible P y una matriz diagonal D que cumplan $P^{-1}AP = D$.

(ii) Calcula la potencia A^{100}.

Solución. (i) Para comprobar si A es diagonalizable, obtenemos primero su polinomio característico,

$$\begin{aligned} p_A(x) = |xI - A| &= \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & -2 \\ 0 & -2 & x-1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & -2 \\ 0 & -2 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)^2\begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ -2 & x-1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ -2 & x-1 \end{vmatrix} = \big((x-1)^2 - 4\big)\begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ -2 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= \big((x-1)^2-4\big)\big((x-1)^2-4\big) = (x^2-2x-3)^2 = (x-3)^2(x+1)^2, \end{aligned}$$

de donde se deduce que los valores propios de A son 3 y -1, ambos con multiplicidad algebraica 2.

Para el primero de ellos, el subespacio fundamental asociado se calcula resolviendo el sistema $Av = 3v$, esto es, $(A - 3I)v = 0$,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

que tiene dos variables libres ($x_2 = \lambda$ y $x_4 = \mu$) y dos dependientes ($x_1 = x_2 = \lambda$ y $x_3 = x_4 = \mu$), por lo que el subespacio tiene la forma $(\lambda, \lambda, \mu, \mu)$, base $\{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}$ y dimensión 2, que coincide con la multiplicidad algebraica.

Para el valor propio -1, el subespacio fundamental asociado se calcula resolviendo el sistema $Av = -v$, esto es, $(A + I)v = 0$,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

que tiene dos variables libres ($x_2 = \lambda$ y $x_4 = \mu$) y dos dependientes ($x_1 = -x_2 = -\lambda$ y $x_3 = -x_4 = -\mu$), por lo que el subespacio tiene la forma $(\lambda, -\lambda, \mu, -\mu)$, base

$\{(-1,1,0,0),(0,0,-1,1)\}$ y dimensión 2, que también coincide con su correspondiente multiplicidad algebraica.

Por tanto, puesto que el polinomio característico se escinde en factores lineales y las multiplicidades algebraica y geométrica coinciden para cada uno de los valores propios, la matriz es diagonalizable. Una base de vectores propios del endomorfismo asociado es

$$B = \{(1,1,0,0),(0,0,1,1),(-1,1,0,0),(0,0,-1,1)\}$$

y las correspondientes matrices de cambio de base y diagonal son

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Para calcular la potencia A^{100} podemos usar la diagonalización de A recién obtenida, puesto que, si sabemos que $D = P^{-1}AP$, se deduce que $A = PDP^{-1}$ y por tanto

$$A^{100} = PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} = PD^{100}P^{-1}.$$

El primer paso es obtener P^{-1} por el método de Gauss-Jordan,

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right),$$

para luego hacer el producto

$$\begin{aligned} PD^{100}P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{100} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^{100} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^{100} & 0 & -1 & 0 \\ 3^{100} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3^{100} & 0 & -1 \\ 0 & 3^{100} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3^{100}+1) & \frac{1}{2}(3^{100}-1) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(3^{100}-1) & \frac{1}{2}(3^{100}+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(3^{100}+1) & \frac{1}{2}(3^{100}-1) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(3^{100}-1) & \frac{1}{2}(3^{100}+1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

∎