ÁLGEBRA (Informática de Sistemas y de Gestión-URJC)
Hoja 5.

---

1. (a) Obtener los valores propios de las siguientes matrices:
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (b) Hallar una base del subespacio propio asociado a cada valor propio de las matrices anteriores.

2. Una matriz cuadrada es nilpotente si $A^n = 0$ para algún entero positivo n. ¿Qué se puede afirmar sobre los valores propios de A?

3. Demostrar que una matriz cuadrada A es invertible si y solamente si $\lambda = 0$ no es un autovalor de A.

4. Determinar, en los siguientes casos, si A es diagonalizable. En caso afirmativo encontrar una matriz P que diagonalice a la matriz A y determinar $P^{-1}AP$.
$$a) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b) \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad c) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Demostrar que, si $b \neq 0$, entonces la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ no es diagonalizable.

6. Resolver la ecuación $f'(x) + 3f(x) = x^2$.

7. Tenemos el sistema $\left\{ \begin{array}{l} y_1'(t) = 3y_1(t) \\ y_2'(t) = -2y_2(t) \\ y_3'(t) = 5y_3(t) \end{array} \right.$.
   (a) Resolver el sistema.
   (b) Obtener la solución del sistema que cumple las condiciones iniciales $y_1(0) = 1, y_2(0) = 4$ y $y_3(0) = -2$.

8. Resolver los siguientes sistemas:
   (a) $\left\{ \begin{array}{l} y_1'(t) = y_1(t) \\ y_2'(t) = 2y_1(t) + y_2(t) \\ y_3'(t) = 2y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) \end{array} \right.$.
   (b) $\left\{ \begin{array}{l} y_1'(t) = y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) = 4y_1(t) - 2y_2(t) \end{array} \right.$.
   (c) $\left\{ \begin{array}{l} y_1'(t) = 4y_1(t) + y_3(t) \\ y_2'(t) = -2y_1(t) + y_2(t) \\ y_3'(t) = -2y_1(t) + y_3(t) \end{array} \right.$.

9. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $y'' - y' - 6y = 0$.

   (b) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

10. Triangularizar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

11. Resolver los siguientes sistemas:

   (a) $\left\{ \begin{array}{l} y_1'(t) = y_1(t) + 2y_2(t) + 2y_3(t) \\ y_2'(t) = 2y_2(t) + y_3(t) \\ y_3'(t) = -y_1(t) + 2y_2(t) + 2y_3(t) \end{array} \right.$.

   (b) $\left\{ \begin{array}{l} y_1'(t) = 2y_1(t) + y_2(t) - y_3(t) \\ y_2'(t) = 2y_2(t) - y_3(t) \\ y_3'(t) = -3y_1(t) - 2y_2(t) + 3y_3(t) \end{array} \right.$.

12. Determinar las sucesiones (a_n) que satisfacen la relación de recurrencia $a_{n+2} = a_{n+1} + 3a_n$.

13. Determinar la sucesión (a_n) definida recursivamente por las condiciones:
$$\left\{ \begin{array}{l} a_{n+2} = 7a_{n+1} - 12a_n \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \end{array} \right. .$$

14. Resolver el sistema de ecuaciones de recurrencia
$$\left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} = 5a_n + 4b_n \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n \end{array} \right. .$$
con las condiciones iniciales $a_1 = 2, b_1 = 3$.

15. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -2 \end{pmatrix}$, calcular A^{11}.