ÁLGEBRA

HOJA 2 DE EJERCICIOS

Subespacios Vectoriales

1. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales?

   (i) $S = \{(a, b, c)$ donde $a = c = 0\}$,
   (ii) $T = \{(a, b, c)$ donde $a = -c\}$,
   (iii) $U = \{(a, b, c)$ donde $b = 2a + 1\}$,
   (iv) $W = \{(a, b, c)$ donde $a^2 + b = 0\}$.

2. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos del espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ formado todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2 son subespacios vectoriales?

   (i) $S = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ donde $p(1) = 0\}$,
   (ii) $T = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ donde $p(2) = 1\}$,
   (iii) $U = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ donde $p'(0) = 0\}$,
   (iv) $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ donde $p(0) = p'(0)\}$.

3. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos del espacio vectorial $\mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ son subespacios vectoriales?

   (i) $S = \{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donde $b = a + c\}$,
   (ii) $T = \{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donde $c > 0\}$,
   (iii) $U = \{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ donde $a = -2c,\ f = 2e + d\}$.

4. Sea S el conjunto de todas las funciones reales de variable real de la forma $f(x) = Ae^{2x} + B\cos(5x) + Cx^2$, donde A, B y C son números reales. Probar que S es un subespacio vectorial del espacio vectorial de todas las funciones reales de variable real.

Dependencia e independencia lineal

5. Estudia si los siguientes vectores de $\mathbb{R}[x]$ son linealmente independientes: $x^3,\ x^2 + x^3,\ 2 + x + x^3,\ 6 + 3x + x^2 + 6x^3$.

6. Determina en cada apartado si el polinomio $p(x)$ pertenece al subespacio generado por $\{x^2 - x,\ x^2 - 2x + 1,\ -x^2 + 1)$, donde

a) $p(x) = 3x^2 - 3x + 1$.
b) $p(x) = x^2 - x + 1$.
c) $p(x) = x + 1$.
d) $p(x) = 2x^2 - x - 1$.

7. Dados los vectores $v = (1, -3, 2)$, $w = (2, -1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$, ¿para qué valores de a es $(1, a, 5)$ combinación lineal de v y w?

8. Determina en cada apartado para qué valores de h es $\{v_1, v_2, v_3\}$ linealmente independiente

   (i) $v_1 = (1, -3, 2),\ v_2 = (-3, 9, -6),\ v_3 = (5, -7, h)$
   (ii) $v_1 = (1, -5, -3),\ v_2 = (-2, 10, 6),\ v_3 = (2, -9, h)$

9. Sean v_1, v_2 y v_3 tres vectores linealmente independientes de un espacio vectorial V. Probar que los vectores $u_1 = v_1$, $u_2 = v_1 + v_2$, $u_3 = v_1 + v_2 + v_3$ son linealmente independientes.

10. Demostrar que los vectores $(1, a, b)$, $(0, 1, c)$ y $(0, 0, 1)$ son siempre linealmente independientes para cualquier valor de a, b y c.

11. ¿Para qué valores de a y b son linealmente dependientes los vectores $(1, 1, 0, a)$, $(3, -1, b, -1)$ y $(-3, 5, a, -4)$?

Bases y dimensión

12. Da ecuaciones paramétricas e implícitas de los subespacios generados por los siguientes conjuntos de vectores. Calcula, además, una base de cada uno de ellos y di cuál es su dimensión:

   (a) $\{(-5, 2, 1, 0), (3, 0, 1, 2), (-1, 0, -2, 4), (2, 1, 0, -3)\}$
   (b) $\{(3, 0, -1, 2), (2, 1, -5, 0)\}$

13. Dados los vectores $v_1 = (1, 0, -1, 2), v_2 = (2, 3, 1, 1), v_3 = (1, 3, 2, -1)$, $v_4 = (1, 1, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^4$

   (i) ¿Son linealmente independientes?
   (ii) Da ecuaciones paramétricas e implícitas para el subespacio generado por v_1, v_2, v_3 y v_4.
   (iii) Extrae de ellos el mayor número posible de vectores que sean linealmente independietes, y construye una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga a esos vectores elegidos.

14. Probar que $H = \{(x, y, z, t) \mid x + y = z - t = 0\}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$. Encontrar una base de H y calcular su dimensión. Prolongar dicha base a una de $\mathbb{R}^4$.

15. Sea $S = \{p(x) \in \mathbb{Q}_3[x] \mid p(1) = p(2)\}$. Probar que S es subespacio vectorial de $\mathbb{Q}_3[x]$. Hallar una base de S y completarla hasta una base de $\mathbb{Q}_3[x]$.

16. Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera el subconjunto $S_a = \{p \in \mathbb{R}_3[X] \mid p(a) = 0\}$ de $\mathbb{R}_3[X]$. Probar que S_a es subespacio vectorial de $\mathbb{R}_3[X]$ para todo $a \in \mathbb{R}$, hallar una base suya y calcular su dimensión.

17. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base de un espacio vectorial V de dimensión 3. Dados los vectores $u = u_1 - 2u_2 + 3u_3$, $v = 2u_1 - 3u_2 + u_3$, y $w = -au_2 + bu_3$,

    (a) ¿Qué relación deben cumplir a y b para que el conjunto $\{u, v, w\}$ sea también una base?.

    (b) Para $a = 1$ y $b = 4$, halla las coordenadas del vector $3u_1 - 6u_2 + 8u_3$ respecto de la base $\tilde{\mathcal{B}} = \{u, v, w\}$.

18. En $\mathbb{R}^4$ consideramos los vectores

$$\{(0,1,1,1), (1,0,1,1), (1,1,0,1), (1,1,1,0)\}.$$

    (a) Probar que forman una base de $\mathbb{R}^4$.

    (b) Calcular las coordenadas del vector $(2,3,0,1)$ en la base del apartado (a).

    (c) Completar los vectores $\{(1,0,1,1), (1,1,0,1), (1,1,1,0)\}$ a una base de $\mathbb{R}^4$.