

1. Sea $S_2 = (O, (e_1, e_2))$ el sistema de coordenadas ortogonales canónico de \mathbb{R}^2 :

$$O = (0, 0), \quad e_1 = (1, 0), \quad e_2 = (0, 1).$$

- a) Dado el vector $v = (2, 3)$, hallar las coordenadas de los vectores

$$v + e_1, \quad v - e_1, \quad \frac{1}{2}v.$$

- b) Comprobar geoméricamente los resultados obtenidos en el apartado a).

2. Sea $S_2 = (O, (e_1, e_2))$ el sistema de coordenadas ortogonales canónico de \mathbb{R}^2 y sean $OP = (1, 2)$ y $OQ = (2, 1)$ dos vectores de \mathbb{R}^2 .

- a) Determinar las coordenadas del vector PQ en S_2 .

- b) Determinar las coordenadas del vector PQ en el sistema ortogonal S'_2 obtenidos por traslación de O al punto $O' = (-2, 1)$.

- c) Calcular las normas del vector PQ utilizando sus coordenadas en S_2 y S'_2 . ¿Son iguales las distancias entre OP y OQ y entre $O'P$ y $O'Q$?

3. En \mathbb{R}^3 , con el sistema de coordenadas ortogonales canónico $S_3 = (O, (e_1, e_2, e_3))$:

$$O = (0, 0, 0), \quad e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1),$$

sean $v = (-1, 0, 1)$, $w = (1, -1, 2)$ y θ el ángulo entre v y w ($0 \leq \theta \leq \pi$).

- a) Calcular $\cos(\theta)$ utilizando la ley de los cosenos:

$$\|w - v\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\|w\|\cos(\theta).$$

- b) Usando las coordenadas de v y w , hallar el producto escalar $v \cdot w$ y verificar la identidad

$$v \cdot w = \|v\|\|w\|\cos(\theta).$$

- c) ¿Qué tipo de ángulo forman v y w ?

4. Demostrar que en \mathbb{R}^2 el vector $n = (a, b) \neq (0, 0)$ es ortogonal a todas las rectas de ecuación

$$ax + by + c = 0, \quad (c \in \mathbb{R}).$$

5. Sean $v = (-1, 0, 1)$ y $w = (1, -1, 2)$ los vectores del problema anterior.

- a) Calcular la proyección ortogonal de w sobre v , $p_v(w)$, y la componente vectorial de w ortogonal a v .

- b) Hallar $\|p_v(w)\|$ y $\|p_{2v}(w)\|$.

6. En este problemas trabajamos en \mathbb{R}^3 con el sistema de coordenadas S_3 .

a) Hallar los vectores

$$e_1 \times e_2, \quad e_2 \times e_3, \quad e_3 \times e_1.$$

b) Demostrar la **identidad de Lagrange**:

$$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - (u \cdot v)^2$$

y, usando la identidad

$$u \cdot v = \|u\|\|v\|\cos(\theta) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3,$$

deducir que

$$\|u \times v\| = \|u\|\|v\|\sin(\theta).$$

c) Sean $u = (1, -1, 2)$ y $v = (0, 3, 1)$. Calcular el área del paralelogramo determinado por los vectores u y v .

d) Verificar que para todo par de vectores u y v en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, $u \times v$ es ortogonal a u y a v .

7. En este problemas seguimos trabajando en \mathbb{R}^3 con el sistema de coordenadas S_3 .

a) Sean u, v y w tres vectores en \mathbb{R}^3 . Verificar que el número real $|u \cdot (v \times w)|$ es el volumen del paralelepípedo P definido por u, v y w . (Se utilice el hecho de que la altura h del paralelepípedo P se puede escribir como $h = \|p_{(v \times w)}(u)\|$.)

b) Calcular el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores

$$u = (1, 0, 2), \quad v = (0, 1, 2), \quad w = (1, 1, 1).$$

8. Sean $P_0 = (1, 2)$ y $P_1 = (-1, 1)$ dos puntos en \mathbb{R}^2 .

Hallar las ecuaciones vectorial, general implícita, paramétricas y pendiente-ordenada en el origen de la recta l que pasa por P_0 y P_1 .

9. Sean $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y r la recta de ecuación $ax + by + c = 0$.

a) Demostrar que la distancia entre P_0 y r es

$$d(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

b) Calcular la distancia entre $P_0 = (0, 1)$ y $r : 2x - y + 3 = 0$.

10. En \mathbb{R}^3 , encontrar la ecuación del plano π que pasa por el punto $P_0 = (1, 0, -1)$ y es ortogonal al vector $n = (2, -1, 5)$.

11. En \mathbb{R}^3 , usando la fórmula de la distancia entre un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y un plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$:

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

a) calcular la distancia entre el punto P_0 de intersección de las rectas de ecuaciones

$$r : \begin{cases} x = -3 + 2k \\ y = 3k \\ z = \frac{2}{3} - k \end{cases} \quad y \quad s : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = t \end{cases} \quad (k, t \in \mathbb{R})$$

y el plano $\pi : 2x - y + z = 0$.

b) Calcular el coseno del ángulo que forman las rectas r y s .

12. Determinar si existen valores de los parámetros reales s y t tales que la recta l en \mathbb{R}^3 de ecuaciones implícitas

$$\begin{cases} sx + 3y + z = 0 \\ -x + ty + 2z + 1 = 0 \end{cases},$$

tenga ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 2k \\ y = -\frac{1}{2} + k \\ z = \frac{3}{2} - 3k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

13. Describir todos los subespacios vectoriales de \mathbb{R}^3 que contienen al punto $P = (1, 1, 1)$.
14. Sea $M_{m,n}(\mathbb{R})$ el \mathbb{R} -espacio vectorial respecto de las operaciones de suma de matrices y multiplicación de una matriz por un escalar usuales. Sea $\mathbb{C}[x]$ el \mathbb{C} -espacio vectorial de los polinomios con coeficientes números complejos y con las operaciones de suma de funciones y multiplicación por un escalar usuales.

Escribir explícitamente las operaciones que hacen del producto cartesiano $M_{m,n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{C}[x]$ un \mathbb{R} -espacio vectorial.

15. Sea M el subconjunto de $M_{m,n}(\mathbb{Z}_2)$ definido por

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ z & 0 & u \end{pmatrix} : x, y, z, u \in \mathbb{Z}_2 \right\}.$$

- a) Escribir M como un conjunto de funciones de $\mathbb{N}_2 \times \mathbb{N}_3$ en \mathbb{Z}_2 que se anulan sobre un subconjunto S de $\mathbb{N}_2 \times \mathbb{N}_3$.
- b) Verificar que M es un \mathbb{Z}_2 -espacio vectorial respecto de las operaciones usuales de suma de matrices y producto de una matriz por un escalar.
16. Determinar los valores reales del parámetro λ tales que los siguientes vectores sean un sistema libre en \mathbb{R}^3 :

$$v_1 = \left(\lambda, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad v_2 = \left(-\frac{1}{2}, \lambda, -\frac{1}{2}\right), \quad v_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \lambda\right).$$

Interpretar geoméricamente los resultados obtenidos.

17. Verificar si los siguientes subconjuntos del espacio de todas las funciones reales, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, son linealmente independientes:

$$S = \{1, \text{sen}(x), \text{sen}(2x)\},$$

$$T = \{(3-x)^2, x^2 - 6x, 5\}.$$

18. Sean $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 1, x)$ y $w = (x, 1, 1)$ tres vectores en \mathbb{R}^3 , siendo x un parámetro real.

Sea $H = L(u, v, w)$ el subespacio de \mathbb{R}^3 generado por u, v y w .

Determinar para qué valores de x el subespacio H es una recta, un plano o todo \mathbb{R}^3 .

19. a) Verificar que para todo $n \in \mathbb{N}$, el sistema $B_n = (1, x, x^2, \dots, x^n)$ es una base del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n , $P_n(\mathbb{R})$.

(Utilizar inducción sobre n y la continuidad de los polinomios)

b) Determinar si el sistema $B = (1, x - 1, (x - 1)^2, (x - 1)^3)$ es una base de $P_3(\mathbb{R})$.

c) Escribir las coordenadas del vector $p(x) = 3x^3 - 3$ en términos de las bases B_3 y B .

20. Sea

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -(a+b+c) \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Verificar que H es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$.

b) Hallar una base B de H .

c) Completar B a una base de $M_2(\mathbb{R})$.

21. En el \mathbb{R} -espacio vectorial $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ de las sucesiones reales sea

$$H = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \forall n \geq 2, \quad x_{n+1} = 2x_n - 3x_{n-1}\}.$$

a) Demostrar que H es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

b) Comprobar que la dimensión de H es 2.

22. Aplicar el teorema de Rouché-Fröbenius

a) para verificar si el vector $p(x) = x^3 - 2x + 1$ pertenece al subespacio $L(x^3 - 1, x + 2)$ de $P_3(\mathbb{R})$,

b) para determinar si el sistema $(x^3 - 1, x + 2, x^2, x - 1)$ es una base de $P_3(\mathbb{R})$.

23. Calcular el rango de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{Z}_3) \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 16 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

24. Utilizar el método de Gauss para hallar una base del \mathbb{C} -subespacio de \mathbb{C}^3 :

$$L((1, 0, i), (i, 0, 0), (0, -i, 4), (1, 1, 1)).$$